1. 두 점 $\mathrm{A}(3, -1), \mathrm{B}(a, -3)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

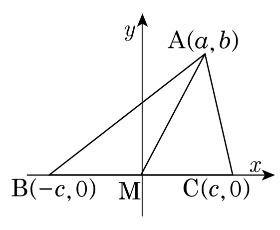
$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (a-3)^3 + (-3+1)^2 = 4$

$a^2 - 6a + 9 = 0$

$(a-3)^2 = 0$

$\therefore \quad a = 3$

2. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> $A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 라 하면
> $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=$(나)
> $\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=$(다)$(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

$A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$ 이므로
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

3. 유리식 $\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}+\dfrac{x-2}{x^2-x+1}-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ 를 간단히 하면 $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^4+x^2+1}$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 abc의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}+\dfrac{x-2}{x^2-x+1}-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$

$=\dfrac{x^2-1+(x-2)(x^2+x+1)}{x^4+x^2+1}$

$-\dfrac{(x+2)(x^2-x+1)}{x^4+x^2+1}$

$=\dfrac{-x^2-5}{x^4+x^2+1}$

따라서, $a=-1,\ b=0,\ c=-5$ 이므로 $abc=0$

4. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$이 x에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$

$x = 1$을 대입하면 $2 = a$ ⋯⋯①

$x = 0$을 대입하면 $3 = a - b + c$ ⋯⋯②

$x = 2$를 대입하면 $3 = a + b + c$ ⋯⋯③

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$b - c = -1$, $b + c = 1$

두 식을 연립하면 $b = 0$, $c = 1$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$

5. $x=-2-i$ 일 때, $x^2+4x+10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x=-2-i$ 에서 $x+2=-i$ 의 양변을 제곱하면
$(x+2)^2=(-i)^2$ 이므로
$x^2+4x=-5$
$\therefore\ x^2+4x+10=-5+10=5$

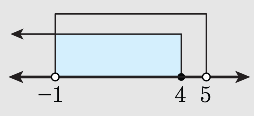
6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

㉠ $2x \le x+4$,
$\therefore x \le 4$
㉡ $x^2-4x-5<0$
$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$
$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의
공통범위는 $-1<x \le 4$
$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

7. 좌표평면에서 두 점 A$(-1,\ 4)$, B$(5,\ -5)$를 이은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 직선 $y=2x+k$ 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① -8　　② -7　　③ -6　　④ -5　　⑤ -4

해설

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times(-5)+1\times4}{2+1}\right)=(3,\ -2)$이다.

점 $(3,\ -2)$가 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$-2=6+k\quad\therefore\ k=-8$

8. $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{2x+1}{x}$ ② $\dfrac{2x-1}{x}$ ③ $\dfrac{x-1}{x}$

④ $\dfrac{x+1}{x}$ ⑤ $\dfrac{1}{x}$

해설

$$1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}$$
$$=1-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x-1+x}{x}$$
$$=\dfrac{2x-1}{x}$$

9. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+2)x^2+4ax+2a^2=0$이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a > \frac{1}{2}$　　② $a \geq \frac{1}{2}$　　③ $a > 1$
④ $a < \frac{1}{2}$　　⑤ $\frac{1}{2} < a < 1$

해설

방정식 $x^3+(a+2)x^2+4ax+2a^2=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|cccc} -a & 1 & a+2 & 24a & 2a^2 \\ & & -a & -2a & -2a^2 \\ \hline & 1 & 2 & 2a & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+a)(x^2+2x+2a)=0$
이 때, 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 $x^2+2x+2a=0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=1-2a<0$　　$\therefore\ a > \frac{1}{2}$

10. 다음 명제의 이가 참이 아닌 것은?

① 실수 a, b, c 에 대하여 $ac = bc$ 이면 $a = b$ 이다.

② 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.

③ 실수 x, y 에 대하여 $x > 1,\ y > 1$ 이면 $xy > 1,\ x + y > 2$ 이다.

④ 대각선이 직교하면 마름모이다.

⑤ 두 각이 같으면, $\triangle$ABC 는 이등변삼각형이다.

해설

‘이’의 대우가 ’역’이므로, ’역’이 참인지 확인 한다.
① 실수 a, b, c 에 대하여 $a = b$ 이면 $ac = bc$ 이다. $\Rightarrow$ (참)
② 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$ 이다. $\Rightarrow$ (참)
③ $xy > 1, x + y > 2$ 이면, $x > 1, y > 1$ 이다. $\left(\text{반례} : x = 5 y = \frac{1}{2}\right)$
④ 마름모이면 대각선이 직교한다. $\Rightarrow$ (참)
⑤ $\triangle$ABC가 이등변삼각형이면, 두 각이 같다. $\Rightarrow$ (참)

11. 두 명제 p는 q이기 위한 충분조건이고 $\sim q$는 r이기 위한 필요조건이다. 다음 보기의 명제 중 반드시 참인 명제를 <u>모두</u> 고르면?

㉠ $q \to \sim r$	㉡ $\sim p \to r$
㉢ $p \to \sim r$	㉣ $\sim r \to \sim p$

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$p \to q \Rightarrow \sim q \to \sim p$

$r \to \sim q \Rightarrow q \to \sim r$

$\therefore p \to q \to \sim r \Rightarrow p \to \sim r$

$\Rightarrow r \to \sim p$

12. 부등식 $x^2+(a+1)x+(a+1)\geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 a의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

$D=(a+1)^2-4(a+1)\leq 0$이어야 하므로
$a^2+2a+1-4a-4$
$=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 3$
따라서 정수 a의 개수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$으로 5개

13. 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } n\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } 54\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $A \neq B$ 이기 위한 자연수 n 의 값은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

n 은 54 를 뺀 54 의 약수이므로 $1, 2, 3, 6, 9, 18, 27$ 이다. 따라서 7 개이다.

14. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots$ (A)가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 (다) 필요충분조건

15. 임의의 양수 x, y 에 대하여 함수 f 가 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ 를 만족하고 $f(2) = 3$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면

$f(1) = f(1) + f(1) - 2$

$\therefore f(1) = 2$

㉠에 $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$

$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$ $\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$