1. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $a^2-3ab+b^2=0$이 성립할 때, $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

준식의 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$

$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2=9-2=7$

따라서, 구하는 식의 값은 7이다.

2. 집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y=U,\ X \cap Y=\varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 12 개

해설

$U=\{1,2,3,4\}$ 에서 $X,\ Y \subset U,\ X \cup Y=U,$
$X \cup Y=\varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X)=n(Y)$
$n(X \cup Y)=n(U)=4,\ X \cup Y=\varnothing$ 이므로
$n(X)+n(Y)=4$ 이다.
$\therefore\ n(X)=n(Y)=2$
$X=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2 \times 6=12$

3. 어느 해 A 대 입시에서 전체 지원자 중 550명이 합격했다. 지원자의 남녀의 비가 8 : 5, 합격자의 남녀의 비가 7 : 4, 불합격자의 남녀의 비가 3 : 2라 할 때, 총 지원자의 수를 구하면?

① 1200　② 1250　③ 1300　④ 1350　⑤ 1400

해설

문제의 조건을 비례상수를 이용하여 다음과 같이 표로 만들어 보자.

	지원자의 수	합격자의 수	불합격자의 수
남	$8k$	$7s$	$3t$
여	$5k$	$4s$	$2t$

이때, $8k = 7s + 3t,\ 5k = 4s + 2t$이고,

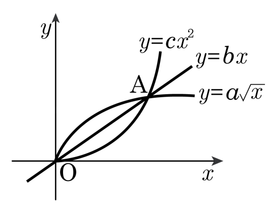
두 식에서 $k = 2s$

한편, $7s + 4s = 11s = 550$

$\therefore\ s = 50$

따라서, 총 지원자의 수는 $8k + 5k = 13k = 26s = 26 \times 50 = 1300$(명)

4. 양의 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x},\ y = bx,\ y = cx^2$의 그래프가 그림과 같이 원점 O와 다른 점 A에서 동시에 만날 때, a, b, c의 관계로 옳은 것은?



① $a^3 = b^2c$　② $a^3 = bc^2$　③ $b^3 = a^2c$　④ $b^3 = ac^2$　⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$과 $y = bx$의 교점의 x좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$\therefore\ x = \dfrac{b}{c}$

곡선 $y = a\sqrt{x}$와 $y = bx$의 교점의 x좌표 (단, $x \neq 0$)는

$a\sqrt{x} = bx \therefore\ x = \dfrac{a^2}{b^2}$

두 점이 일치하므로 $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a^2}{b^2}$

$\therefore\ b^3 = a^2c$

5. 집합 $A=\{x \mid 0 \le x \le 2\}$에 대하여

함수 $f: A \to A$를 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (0 \le x \le 1) \\ x-1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다.

이때, $f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은? (단, $f^2=f\circ f$, $f^3=f\circ f\circ f$, $\cdots$)

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

해설

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

$f^2\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

$f^3\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

$\vdots$

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$

$=\left\{f\left(\frac{1}{3}\right)+f^3\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{29}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$\quad+\left\{f^2\left(\frac{1}{3}\right)+f^4\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$=15\cdot\frac{4}{3}+15\cdot\frac{1}{3}=25$

6. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$ ② $2f(7)$ ③ $f(7)$ ④ $f(8)$ ⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1)+f(n)$ 을 이용하여 $f(4)+f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7), f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로

$2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.

7. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 로 정의될 때, $f(x)+f(2-x)$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 $f(x) = \begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 에서

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로
$f(x)+f(2-x)=(2-x)+\{2-(2-x)\}=2$
(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로
$f(x)+f(2-x)=x+(2-x)=2$
(i), (ii) 에서 $f(x)+f(2-x)=2$

8. 함수 $f(x)$가 임의의 x, y에 대하여 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족시킬 때 $2f(0) + f(2)$의 값은? (단, $f(1) = 1$)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 는 임의의 x, y 에 대하여 항상 성립하므로

$x = 1,\ y = 0$ 일 때 $f(1) \cdot f(0) = f(1) + f(1)$

$\therefore\ f(0) = 2\ (\because\ f(1) = 1)$

$x = 1,\ y = 1$ 일 때 $f(1) \cdot f(1) = f(2) + f(0)$ 에서 $1 = f(2) + 2$

$\therefore\ f(2) = -1$

$\therefore\ 2f(0) + f(2) = 4 - 1 = 3$

9. 서로소인 두 자연수 $m,\ n(m>n)$에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$을 다음과 같이 나타낼 수 있으며 이와 같은 방법으로 $\frac{151}{87}$을 나타낼 때, $a_1+a_2+a_3+a_4$의 값은?

$$\frac{m}{n}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$$\frac{151}{87}=1+\frac{64}{87}=1+\cfrac{1}{\cfrac{87}{64}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{23}{64}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{64}{23}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{18}{23}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{23}{18}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{18}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{5}}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

$\therefore a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_4=3$ 이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+1+3=7$

10. 세 실수 x, y, z에 대하여 $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{z}=1$이 성립할 때, xyz의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ -2 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$x+\frac{1}{y}=1\cdots$①, $y+\frac{1}{z}=1\cdots$②

①에서 $\frac{1}{y}=1-x$, $y=\frac{1}{1-x}$

이것을 ②에 대입하면

$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{z}=1$, $z=-\frac{1-x}{x}$

$\therefore\ xyz=x\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\left(-\frac{1-x}{x}\right)=-1$