

1. $x - y = 1$ 을 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여 등식 $3x^2 - 5x + 1 = ay^2 + by + c$ 이 항상 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = y + 1$ 을 주어진 식에 대입한 후,
 y 에 대한 내림차순으로 정리한다.
 $3(y + 1)^2 - 5(y + 1) + 1 = ay^2 + by + c$
 $(3 - a)y^2 + (1 - b)y - 1 - c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 1, c = -1$
 $\therefore a + b + c = 3$

2. 등식 $2x^2 - 6x - 2 = a(x+1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x+1)$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$x=0$ 을 대입하면: $a=1$
 $x=-1$ 을 대입하면: $b=2$
 $x=2$ 을 대입하면: $c=-1$
 $\therefore a+b+c=2$

3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$ 을 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여 항상 $ax+by+5 = 0$ 이다. 이때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = t$ 라 하면
 $x = 2t - 1, y = 3t + 1$
이것을 $ax + by + 5 = 0$ 에 대입하면
 $a(2t - 1) + b(3t + 1) + 5 = 0$
 $(2a + 3b)t + (-a + b + 5) = 0$
이 식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로
 $2a + 3b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $-a + b + 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하여 풀면
 $a = 3, b = -2 \quad \therefore a + b = 3 + (-2) = 1$

해설

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$ 성질 이용
 $3x + 3 = 2y - 2$
 $3x - 2y + 5 = 0$ 은 $ax + by + 5 = 0$
 $\therefore a = 3, b = -2$

4. 다항식 $x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 을 $x + 1$ 로 나눈 나머지는?

- ① -33 ② -22 ③ -11 ④ 11 ⑤ 33

해설

$f(x) = x^{22} + x^{11} + 22x + 11$ 이라 하면,
 $f(x) = (x + 1)Q(x) + R$ 에서 $f(-1) = R$ 이므로
 $f(-1) = (-1)^{22} + (-1)^{11} - 22 + 11 = -11$

5. 다항식 $x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 일차식 $x - 2$ 로 나눌 때의 나머지는?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 6 \\ &= (x - 2)Q(x) + R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 \\ &= 8 - 8 + 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore R = 4$$

6. $f(x) = 2x^3 - 2x + k$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, k 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ -8 ④ -10 ⑤ -12

해설

$f(x) = 2x^3 - 2x + k$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지면
나머지정리에 의해 $f(2) = 16 - 4 + k = 0$
 $\therefore k = -12$

7. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1+a)x^2 + (1-a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1+a) = b, 1-a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

8. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는

$$(a-b+16)x+4b-8$$

$$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots\textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a-b+16=3, 4b-8=4$$

$$\therefore a=-10, b=3$$

$$\therefore a+b=-7$$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를

비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

9. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
 $f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

10. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x + 2$ 로도 나누어떨어지고, $x - 1$ 로도 나누어떨어질 때, $\frac{q}{p}$ 의 값은?

- ① 9 ② 4 ③ -9 ④ -3 ⑤ -12

해설

$$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$$

$$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$$

$$p = -3, q = -12, \frac{q}{p} = \frac{-12}{-3} = 4$$

11. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1, x - 2$ 로 나누어 떨어진다.
 $f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots \textcircled{\text{A}}$
 $f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots \textcircled{\text{B}}$
 $\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 으로부터 $a = -\frac{7}{2}, b = \frac{7}{2}$
 $\therefore a + b = 0$

12. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가
 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면
 $P(-1) = P(3) = 0$
 $P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = -7$
 $P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \quad \therefore 3a + b = -81$
 $\therefore a = -22, b = -15$

13. 다항식 $8x^3 - 1$ 을 $4x^2 + 2x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때 $Q(x)$ 의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$\therefore Q(x) = 2x - 1$$

$$\therefore \text{상수항은 } -1$$

14. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$

② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$

⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$$(k+1)(k+2) = \frac{3}{3}(k+1)(k+2) \text{ 이므로}$$

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

$$(\text{준 식}) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

15. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$

② $x^2 - 1$

③ $x^2 + 2$

④ $x^2 - 2$

⑤ $x^2 + 3$

해설

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$$

$$\therefore (\text{준식}) = x^2 + 1$$

16. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) \\ \therefore a &= -1, b = 2 \\ \therefore ab &= -1 \times 2 = -2\end{aligned}$$

17. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$
$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

18. x^3-4x^2+x+6 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,
 $x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$ 는 $(x + 1)$ 로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$ 는 $(x + 1)$ 의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x + 1)Q(x)$ 몫
 $Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

-1		1	-4	1	6	
			-1	5	-6	
		1	-5	6	0	

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x + 1)$
 $\therefore f(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

19. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m - n$ 의 값은?

- ① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x = -1, x = 2$ 를 각각 대입하면

$x = -1$ 일 때,

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 2\text{일 때, } (2)^3 + m(2)^2 + n \cdot 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하면

$$m = \frac{2}{3}, n = -\frac{13}{3}$$

$$\therefore m - n = 5$$

20. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{ 라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

21. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i = 1$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 옳게 구한 것은?

1	1	a	b	c
		d	e	f
	1	g	h	i

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

1	1	a	b	c
		1	$a+1$	$a+b+1$
	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1$

이때 $a+b+c+1 = 1$ 이므로

$a+b+c = 0$

따라서 ③이다.

22. 사차식 $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3y$

② $x - 2y$

③ $x - y$

④ $x + y$

⑤ $x + 3y$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 &= (x^2 - 9y^2)(x^2 - y^2) \\&= (x - 3y)(x + 3y)(x - y)(x + y)\end{aligned}$$

23. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

- ① -1
- ② 1
- ③ $-\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{1}{2}$
- ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 \end{aligned}$$

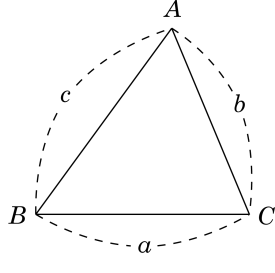
24. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0 \\ & (x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \\ & \therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} = 0 \\ & \text{그런데 } x, y, z \text{가 서로 다른 세 실수 } (x \neq y \neq z) \text{이므로} \\ & x + y + z = 0 \end{aligned}$$

25. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에서 $a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?



- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $a = c$ 인 이등변삼각형
 ③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형
 ⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 + b^2c + bc^2 - c^2a - ca^2 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^2(b+c) + c^2(b+c) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + (b+c)(b^2+c^2) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)(a^2 - b^2 - c^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$
 이 때, a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$
 $\therefore a^2 - b^2 - c^2 = 0$,
 즉 $a^2 = b^2 + c^2$
 따라서, $\triangle ABC$ 는 a 를 빗변으로 하는 직각삼각형,
 즉 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

26. $a(a+1)=1$ 일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6-1}{a^4-a^2} &= \frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입} \\ &= \frac{2(1-a) \times 2}{1-a} = 4\end{aligned}$$