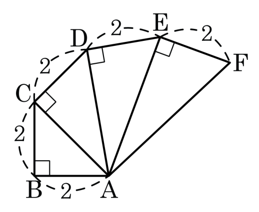
1. 다음 그림에서 $\triangle$AEF 의 둘레의 길이는?

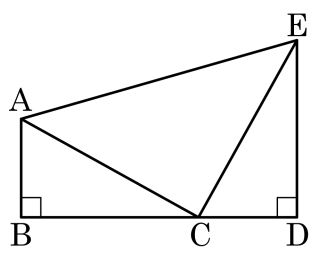


① $6+2\sqrt{5}$　② $5+2\sqrt{5}$
③ $4+2\sqrt{5}$　④ $3+2\sqrt{5}$
⑤ $2+2\sqrt{5}$

해설

$\overline{AE} = \sqrt{2^2+2^2+2^2+2^2} = 4$,
$\overline{AF} = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$
따라서 $\triangle$AEF 의 둘레를 구하면 $4+2+2\sqrt{5} = 6+2\sqrt{5}$ 이다.

2. 다음 그림에서 두 직각삼각형 ABC 와 CDE 는 합동이고, 세 점 B, C, D 는 일직선 위에 있다.$\overline{AB} = 5\,\text{cm}$, $\overline{DE} = 9\,\text{cm}$ 일 때, $\triangle ACE$ 의 넓이는?

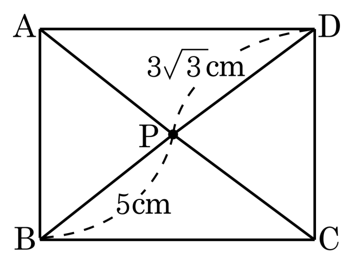


① 49 ② 50 ③ 51 ④ 52 ⑤ 53

해설

$\overline{AB} = 5$, $\overline{DE} = \overline{BC} = 9$ 이므로
$\overline{AC} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$ 이다.
$\triangle ACE$ 이 $\angle ACE = 90°$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\triangle ACE = \frac{1}{2} \times \sqrt{106} \times \sqrt{106} = 53$
따라서 $\triangle ACE = 53$ 이다.

3. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 의 내부에 한 점 P 가 있다. $\overline{\mathrm{PB}} = 5\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{PD}} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 의 값은?

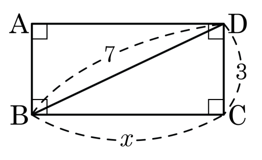


① 34 ② 42 ③ 49 ④ 50 ⑤ 52

해설

$\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2 = (3\sqrt{3})^2 + 5^2 = 52$ 이다.

4. 다음 그림에서 x 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2\sqrt{10}$

해설

피타고라스 정리에 따라서 $49 = 9 + x^2$
x 는 변의 길이이므로 $x > 0$
$\therefore x = 2\sqrt{10}$ 이다.

5. 대각선의 길이가 12 인 정사각형의 넓이는?

① 36 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 144

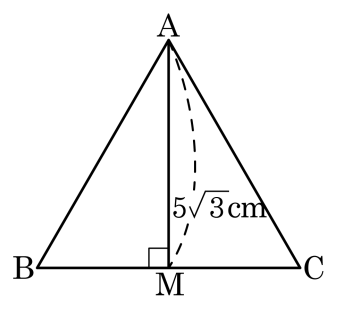
해설

정사각형 한 변을 a 라 하면 대각선은 $\sqrt{2}a$ 이므로

$\sqrt{2}a = 12$, $a = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

따라서, 정사각형의 넓이는 $6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 72$ 이다.

6. 다음 그림과 같이 높이가 $5\sqrt{3}\,\text{cm}$ 인 정삼각형 ABC 의 한 변의 길이와 넓이를 구하여라.



① 한 변의 길이 : $8\,\text{cm}$, 넓이 : $20\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

② 한 변의 길이 : $10\,\text{cm}$, 넓이 : $25\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

③ 한 변의 길이 : $12\,\text{cm}$, 넓이 : $28\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

④ 한 변의 길이 : $14\,\text{cm}$, 넓이 : $35\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

⑤ 한 변의 길이 : $16\,\text{cm}$, 넓이 : $38\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

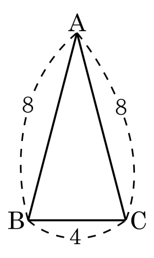
해설

한 변의 길이를 a 라고 하면 $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 5\sqrt{3}$ 에서

$a = 5\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2 = 10(\text{cm})$

(넓이)$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

7. 다음과 같이 두 변의 길이가 8, 밑변의 길이가 4 인 이등변삼각형의 넓이는?



① $4\sqrt{13}$ ② $4\sqrt{15}$ ③ $4\sqrt{17}$ ④ $4\sqrt{19}$ ⑤ $4\sqrt{21}$

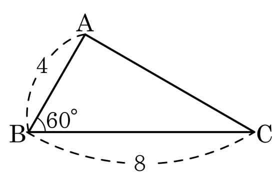
해설

이등변삼각형의 높이는

$\sqrt{8^2-2^2} = \sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$(\text{넓이}) = 4 \times 2\sqrt{15} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{15}$

8. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① $4\sqrt{3}$ ② 8 ③ $6\sqrt{3}$

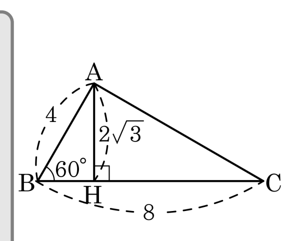
④ $7\sqrt{3}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

해설

점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\triangle ABH$ 에서 $\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AH} : 4 = \sqrt{3} : 2$

$\therefore \overline{AH} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$



9. 한 모서리의 길이가 $4\sqrt{3}$ 인 정사면체가 있다. 이 정사면체의 부피를 구하여라.

▶ 답 :

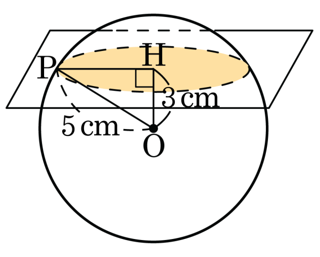
▷ 정답 : $16\sqrt{6}$

해설

정사면체의 부피는 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 이므로

$\frac{\sqrt{2}}{12} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{6}$

10. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5cm 인 구를 중심 O 에서 3cm 떨어진 평면으로 자를 때 생기는 단면의 반지름은?

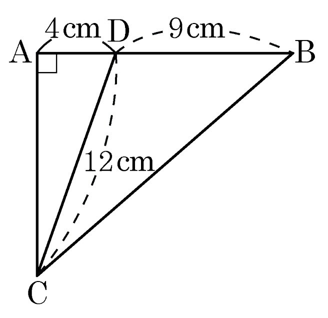


① 3cm ② 4cm ③ 5cm ④ 6cm ⑤ 7cm

해설

$\overline{PH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4(\text{cm})$

11. 다음은 $\angle A = 90°$, $\overline{AD} = 4\text{cm}$, $\overline{BD} = 9\text{cm}$, $\overline{CD} = 12\text{cm}$ 인 직각삼각형이다. $\overline{BC}$ 의 길이는?



① $\sqrt{31}\text{cm}$　② $2\sqrt{33}\text{cm}$　③ $3\sqrt{33}\text{cm}$
④ $4\sqrt{33}\text{cm}$　⑤ $5\sqrt{33}\text{cm}$

해설

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} \\ &= \sqrt{128} = 8\sqrt{2}(\text{cm}) \\ \overline{BC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} \\ &= \sqrt{169 + 128} \\ &= \sqrt{297} = 3\sqrt{33}(\text{cm})\end{aligned}$$

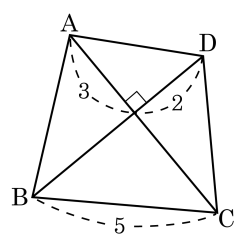
12. 다음 중 직각삼각형인 것은? (단, $n > 1$ 이다.)

① $4n$, $7n$, $9n$
② $4n$, $5n$, $6n$
③ $10n$, $11n$, $12n$
④ $n^2 - 1$, $2n$, $n^2 + 1$
⑤ $n^2 - 1$, n , $n^2 + 1$

해설

④ $(n^2+1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1$, $(n^2-1)^2 + (2n)^2 = n^4 + 2n^2 + 1$
따라서 직각삼각형이다.

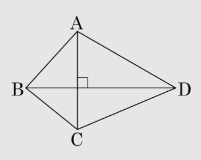
13. 다음 그림과 같이 □ABCD 의 두 대각선이 직교할 때, $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$ 의 값은?



① 34 ② 35 ③ 36

④ 37 ⑤ 38

해설



대각선이 수직인 사각형에서는 다음 관계가 성립한다. $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2$

$\overline{AD}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=(\sqrt{13})^2+5^2=38$

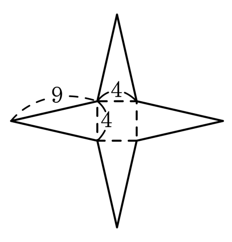
14. 대각선의 길이가 24cm 인 정육면체의 한 변의 길이로 만든 정삼각형의 높이는?

① 12cm ② 16cm ③ 20cm ④ 24cm ⑤ 28cm

해설

정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면,
$x\sqrt{3} = 24$, $x = 8\sqrt{3}$cm
따라서, 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 8\sqrt{3} = 12(\mathrm{cm})$ 이다.

15. 다음의 전개도로 만든 입체도형의 부피를 구하면?



① $\frac{14\sqrt{73}}{3}$　② $\frac{15\sqrt{73}}{3}$　③ $\frac{16\sqrt{73}}{3}$
④ $\frac{17\sqrt{73}}{3}$　⑤ $\frac{18\sqrt{73}}{3}$

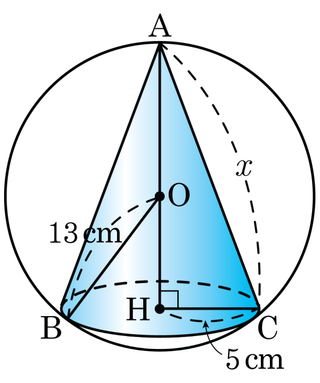
해설

높이를 h, 부피를 V라 하면

$h = \sqrt{9^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{81-8} = \sqrt{73}$

$V = 16 \times \sqrt{73} \times \frac{1}{3} = \frac{16\sqrt{73}}{3}$

16. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 13 cm 인 구 안에 꼭맞는 원뿔의 밑면의 반지름이 5 cm 일 때, 원뿔의 모선의 길이 x 를 구하여라.



▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : $5\sqrt{26}$ cm

해설

$\triangle$OHC 에서

$\overline{OH} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\mathrm{cm})$

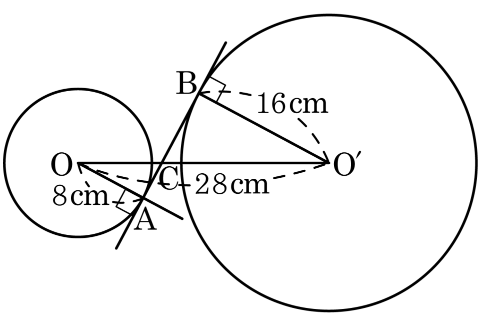
$\overline{AH} = 13 + 12 = 25(\mathrm{cm})$

$\triangle$AHC 에서

$x = \sqrt{25^2 + 5^2}$

$= \sqrt{625 + 25} = \sqrt{650} = 5\sqrt{26}(\mathrm{cm})$

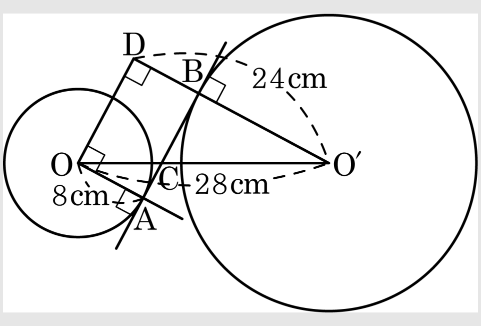
17. 다음 그림에서 반지름의 길이가 8 cm , 16 cm 인 원 O, O′ 의 중심 사이의 거리는 28 cm 이다. 공통접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $4\sqrt{13}$ cm

해설

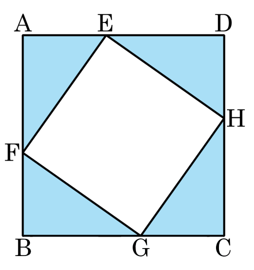


$\overline{O'B}$ 의 연장선과 점 O 에서 $\overline{AB}$ 에 평행하게 그은 직선이 만나는 점을 D 라 하면

$\overline{O'D} = 16 + 8 = 24(\text{cm})$

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{OD} &= \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'D}^2} \\ &= \sqrt{28^2 - 24^2} = \sqrt{208} \\ &= 4\sqrt{13}(\text{cm})\end{aligned}$$

18. 다음 정사각형 ABCD 에서 $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{BG}} = \overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{DE}}$ 이고, 4 개의 직각삼각형의 넓이의 합이 $18\sqrt{3}$ 이 성립한다. □ABCD 의 둘레의 길이가 $12\left(1+\sqrt{3}\right)$ 일 때, $\overline{\mathrm{AE}}^2 + \overline{\mathrm{DE}}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

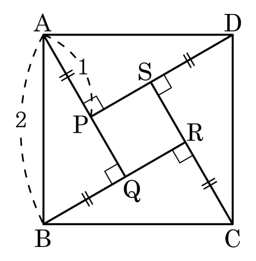
$\overline{\mathrm{AE}} = a$, $\overline{\mathrm{DE}} = b$ 라고 할 때,

직각삼각형의 넓이의 합이 $18\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle$AEF 의 넓이는 $\frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}ab$

□ABCD 의 둘레의 길이가 $12\left(1+\sqrt{3}\right)$ 이므로 $4(a+b) = 12\left(1+\sqrt{3}\right)$

따라서 $a+b = 3+3\sqrt{3}$, $ab = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ 이므로 $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 9+18\sqrt{3}+27-18\sqrt{3} = 36$ 이다.

19. 다음 그림과 같은 정사각형 ABCD 에서 $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS}$ 일 때, 다음 설명 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\square PQRS = \frac{1}{4}\square ABCD$

② $\overline{AQ} = \sqrt{3}$

③ $\square PQRS = 4 - 2\sqrt{3}$

④ $\triangle ABQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\square PQRS$ 는 한 변의 길이가 $\sqrt{3} - 1$ 인 정사각형이다.

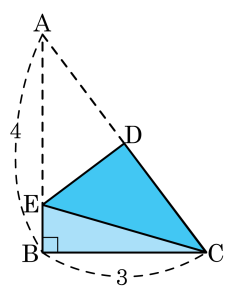
해설

① $\square PQRS = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

$\square ABCD = 4$

$\therefore\ \square PQRS \neq \frac{1}{4}\square ABCD$

20. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 AC 를 두 점 A 와 C 가 겹쳐지도록 접었을 때, $\triangle$CDE 의 둘레의 길이는?

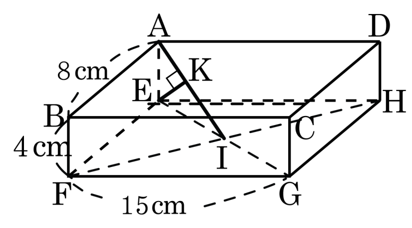


① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$
④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

해설

$\triangle$ABC 가 직각삼각형이므로
$\overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2$, $\overline{AC} = 5$ 이다.
$\overline{EB} = x$ 라 두면 $\overline{AE} = \overline{EC} = 4 - x$ 이고
$\triangle$EBC 가 직각삼각형이므로
$(4-x)^2 = x^2 + 3^2$, $x = \frac{7}{8}$ 이다.
$\triangle$ADE 가 직각삼각형이므로
$\overline{DE}^2 = \left(\frac{25}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$, $\overline{DE} = \frac{15}{8}$ 이다.
따라서 $\triangle$CDE 의 둘레는 $\frac{15}{8} + \frac{25}{8} + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$ 이다.

21. 다음 그림과 같은 직육면체에서 점 I 는 밑면의 대각선의 교점이고, 점 E 에서 $\overline{\mathrm{AI}}$ 에 내린 수선의 발을 K 라 할 때, $\overline{\mathrm{EK}}$ 의 길이를 구하면?



① $\dfrac{66\sqrt{353}}{353}$　② $\dfrac{67\sqrt{353}}{353}$　③ $\dfrac{68\sqrt{353}}{353}$

④ $\dfrac{69\sqrt{353}}{353}$　⑤ $\dfrac{70\sqrt{353}}{353}$

해설

$\overline{\mathrm{EG}} = \sqrt{8^2+15^2} = 17 \quad \therefore \overline{\mathrm{EI}} = \dfrac{17}{2}$

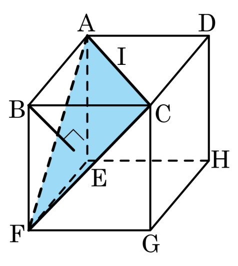
$\overline{\mathrm{AI}} = \sqrt{4^2 + \dfrac{17^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{353}}{2}$

$\triangle$AEI 의 넓이를 이용하면

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AE}} \times \overline{\mathrm{EI}} = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AI}} \times \overline{\mathrm{EK}}$

$17 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{353}}{2} \times \overline{\mathrm{EK}} \quad \therefore \overline{\mathrm{EK}} = \dfrac{68\sqrt{353}}{353}$

22. 한 모서리의 길이가 $4\,\mathrm{cm}$ 인 정육면체 ABCD−EFGH 에 대하여 점 B 에서 $\triangle\mathrm{AFC}$ 에 내린 수선의 길이를 h 라 할 때, h는 $a\sqrt{b}\,\mathrm{cm}$ 이다. $a\times b$ 의 값을 구하여라.(단, b는 최소의 자연수)



▶ 답 :

▷ 정답 : $a\times b=4$

해설

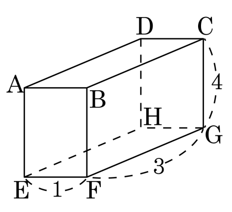
삼각뿔 F−ABC 의 부피는 $\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\overline{\mathrm{BF}}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times4\right)\times 4=\frac{32}{3}(\mathrm{cm}^3)$

$\triangle\mathrm{AFC}$ 는 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}\mathrm{cm}$ 인 정삼각형이므로 $\triangle\mathrm{AFC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2=8\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

$\frac{32}{3}=\frac{1}{3}\times8\sqrt{3}\times h\ \therefore\ h=\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}$ 이다.

따라서 $a\times b=\frac{4}{3}\times3=4$ 이다.

23. 다음 그림은 세 모서리의 길이가 각각 1, 3, 4 인 직육면체이다. 꼭짓점 A 에서 G 까지 면을 따라 움직일 때, 가장 짧은 거리를 구하여라.



▶ 답 :

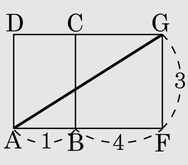
▷ 정답 : $4\sqrt{2}$

해설

(i) $\overline{BC}$ 를 지날 때, $\triangle AGF$ 는 직각삼각형이므로

$\overline{AG}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FG}^2$

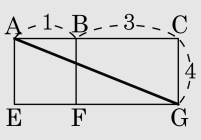
$\overline{AG} = \sqrt{(1+4)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$



(ii) $\overline{BF}$ 를 지날 때, $\triangle ACG$ 는 직각삼각형이므로

$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2$

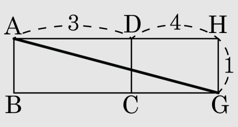
$\overline{AG} = \sqrt{(1+3)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$



(iii) $\overline{CD}$를 지날 때, $\triangle AHG$는 직각삼각형이므로

$\overline{AG}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HG}^2$

$\overline{AG} = \sqrt{(4+3)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$



(i), (ii), (iii) 에 의하여 최단거리는 $4\sqrt{2}$ 이다.

24. 다음 조건을 만족하는 50 개의 변량 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{48},\ x_{49},\ x_{50}$ 의 분산을 구하여라.

㉠ $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{48}+x_{49}+x_{50}=100$
㉡ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{48}^2+x_{49}^2+x_{50}^2=800$

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{48}+x_{49}+x_{50}=100$ 이므로 평균은

$\dfrac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{48}+x_{49}+x_{50}}{50}=\dfrac{100}{50}=2$

이므로 각 변량에 대한 편차는 $x_1-2,\ x_2-2,\ x_3-2,\ \cdots,\ x_{48}-2,\ x_{49}-2,\ x_{50}-2$ 이다.

따라서 분산은

$\dfrac{1}{50}\{(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+(x_3-2)^2+\cdots+(x_{48}-2)^2+(x_{49}-2)^2+(x_{50}-2)^2\}$

$=\dfrac{1}{50}\{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{48}^2+x_{49}^2+x_{50}^2)-4(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{48}+x_{49}+x_{50})+4\times 50\}$

$=\dfrac{800-4\times 100+4\times 50}{50}=12$ 이다.

25. 세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 7 , 분산이 4 일 때, $ab,\ bc,\ ca$ 의 평균을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 7 이므로

$\frac{a+b+c}{3}=7$

$\therefore a+b+c=21 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, 세 수 $a,\ b,\ c$ 의 분산이 4 이므로

$\frac{(a-7)^2+(b-7)^2+(c-7)^2}{3}=4$

$\frac{a^2-14a+49+b^2-14b+49+c^2-14c+49}{3}=4$

$\frac{a^2+b^2+c^2-14(a+b+c)+147}{3}=4$

$a^2+b^2+c^2-14(a+b+c)+135=0$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=14(a+b+c)-135 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 식에 ㉠을 대입하여 풀면

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=14\times 21-135=159 \quad \cdots\cdots ㉢$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로 ㉠, ㉢에 의하여

$ab+bc+ca=141$

따라서 $ab,\ bc,\ ca$ 의 평균은

$\therefore\ \frac{ab+bc+ca}{3}=\frac{141}{3}=47$

26. 변의 길이가 각각 4, 6, 8 인 삼각형 ABC 에서 변 AB, BC, CD 의 중점을 각각 D, E, F 라 할 때, $\overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CD}^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 87

해설

파푸스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 2\left\{\overline{AE}^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2\right\} \cdots ㉠$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\left\{\overline{BF}^2 + \left(\frac{\overline{CA}}{2}\right)^2\right\} \cdots ㉡$$

$$\overline{CA}^2 + \overline{BC}^2 = 2\left\{\overline{CD}^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2\right\} \cdots ㉢$$

㉠ + ㉡ + ㉢를 하면

$$\frac{3}{4}\left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2\right) = \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\therefore\ \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{3}{4}\left(4^2 + 6^2 + 8^2\right) = 87$$