**1.** 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 $X$ 의 원소 $x$ 에 $Y$ 의 원소 $y$ 가 다음 보기와 같이 대응될 때, 이 중 $X$ 에서 $Y$ 로의 함수인 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x \to x+1$ ㉡ $x \to 2x-1$

㉢ $x \to x^2+2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠




㉡




㉢

**2.** 두 함수 $f(x) = 2x + 1$ , $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

**3.** 다음 중 역함수가 존재하지 <u>않는</u> 것은?

① $y = x - 2$　　② $y = x^2$

③ $y = x^3$　　④ $y = x^2 - 2x$ (단, $x \geq 1$ )

⑤ $y = |x - 1|$ (단, $x \geq 1$ )

해설

일대일 대응이 아닌 것은 ②번이다.
그러므로 ②번 그래프는 역함수가 존재하지 않는다.

**4.** 다음 함수 $y = 2x - 5\ (x \geq 1)$ 의 역함수를 구하면?

① $y = 2x - 5$
② $y = 2x - 5(x \geq 1)$
③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}(x \geq 1)$
⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}(x \geq -3)$

해설

$y = 2x - 5(x \geq 1, y \geq -3) \rightarrow x = 2y - 5$

$\rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

여기서 $x \rightarrow y,\ \ y \rightarrow x$ 이므로 $x \geq -3$ 이 된다.

$\therefore\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\ (x \geq -3)$

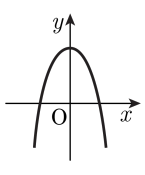
**5.** 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$일 때, 상수 $a$의 값은 얼마인가?

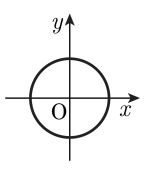
① $-5$ ② $-3$ ③ $-1$ ④ $1$ ⑤ $3$

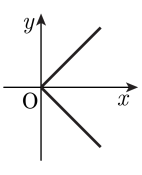
해설

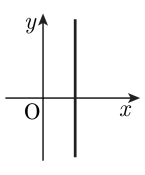
$f^{-1}(-7) = 2$이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2) = -7$, $f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7$, $3a = -9$
$\therefore a = -3$

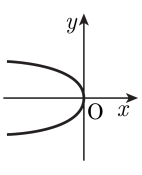
**6.** 다음 중 함수의 그래프인 것은?

① 


② 


③ 


④ 


⑤ 


해설

함수는 하나의 $x$값에 여러 개의 $y$값이 대응될 수 없다.

**7.** 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 $f$의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$이므로 함수 $f$의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

**8.** 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$　　② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$　　④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$
$f(a)+f(b)=|a\,|+|b\,|$
이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$
$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$
$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$

**9.** 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 $X$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 $X$의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로
$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서
$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$\therefore\ x=5,\ -1$
즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.
$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

**10.** 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$ ② $y = x^2$ ③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$ ⑤ $y = \dfrac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
$x$, $y$ 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

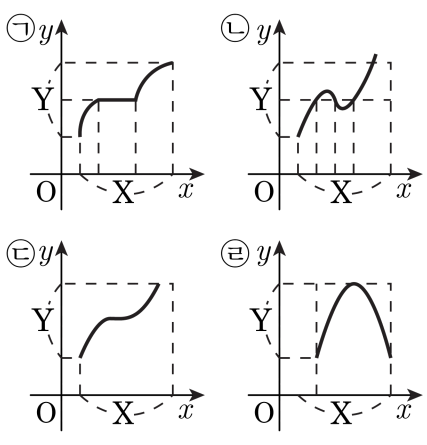
**11.** $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y},\ x \to f(x)$라 한다. $X$의 임의의 두 원소를 $a$, $b$라 할 때, 다음 중에서 $f$가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$
② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$
③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$
④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$
⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의
「$a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$」의 대우

**12.** 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?




① (ㄱ) (ㄷ) ② (ㄴ) (ㄹ) ③ (ㄷ)

④ (ㄱ) ⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

$X$에서 $Y$로의 일대일 대응을 찾으면 된다.




㉠ $\{x|a \le x \le b\}$에 속하는 $x$의 상이 모두 $c$이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ $a$, $b$, $c$의 상이 모두 $d$이므로 일대일 대응이 아니다.

㉢, ㉡의 경우와 같다.

**13.** 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. $X$ 에서 $Y$로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24개

해설

$a$에 대응하는 수가 $b$에 대응해서는 안 되고
$a, b$에 대응하는 수가 $c$에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

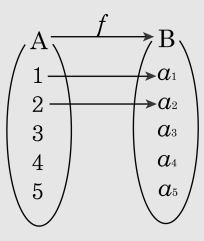
**14.** 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 $f$ 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 $f$ 의 개수는?

① 8 개　② 25 개　③ 64 개

④ 81 개　⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수
$f : A \to B$ 는 다음 그림에서 $A$ 의 원소 3, 4, 5 에 $B$ 의 원소 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 중 하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



**15.** 두 함수 $f$, $g$가 $f(x)=2x-3$, $g(2x-1)=-6x+5$ 를 만족할 때, $(f\circ g)(5)$의 값은? (단, $f\circ g$ 는 $g$와 $f$의 합성함수이다.)

① 18 ② 12 ③ −15 ④ −24 ⑤ −29

해설

$(f\circ g)(5)=f(g(5))$

$2x-1=5$ 에서 $x=3$ 이므로

$g(5)=-6\cdot 3+5=-13$

$\therefore\ (f\circ g)(5)=f(-13)=2\cdot(-13)-3=-29$

**16.** 두 함수 $f(x) = -3x+k$, $g(x) = 2x+4$에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$가 성립하도록 하는 $k$의 값은 얼마인가?

① $-16$ ② $-14$ ③ $-6$ ④ $-4$ ⑤ $-2$

해설

$f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$에서

$(f \circ g)(x) = f(2x+4) = -3(2x+4) + k$

$= -6x - 12 + k \cdots$㉠

$(g \circ f)(x) = g(-3x+k) = 2(-3x+k) + 4$

$= -6x + 2k + 4 \cdots$㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-6x - 12 + k = -6x + 2k + 4$

$\therefore k = -16$

**17.** 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

**18.** 실수 전체의 집합 $R$ 에서 $R$ 로의 함수 $f$ 가 $f : x \to x+1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, $n$ 은 자연수)

① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$f^2(x) = f(f(x)) = (x+1)+1 = x+2$
$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x+2)+1 = x+3$
$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x+3)+1 = x+4$
$\vdots$
이상에서 $f^n(x) = x+n$ 이므로
$f^{2006}(x) = x+2006$
$\therefore\ f^{2006}(2) = 2+2006 = 2008$

**19.** 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$ , $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$
연립하면 $a = -1,\ b = 3$
$\therefore\ f(3) = 3a + b = 0$

**20.** 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

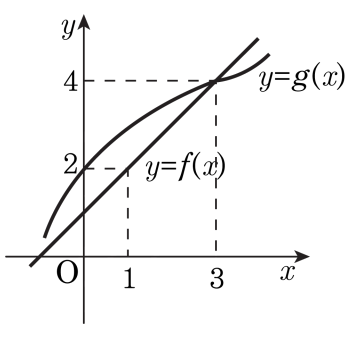
④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

합성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

**21.** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)$의 값은 얼마인가?




① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면
$(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)=g^{-1}(f(1))+4$
$=g^{-1}(2)+4$
$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$
문제의 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가
$(0,2)$를 지나므로 $g(0)=2$
이 때, $y=g(x)$는 일대일대응이므로 $k=0$
$\therefore g^{-1}(2)+4=0+4=4$

**22.** $f$는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

| |
|---|
| ㉠ $f(2n) = 2 \cdot f(n) (n = 1, 2, 3, \cdots)$ |
| ㉡ $f(2n+1) = (-1)^n \cdot 2 (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ |

이 때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

**23.** 자연수 $n$에 대하여 $n(n+1)(n+2)$의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(1)=6, f(2)=4$이다. 이 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 40

해설

$n=1$ 이면 $1\cdot 2\cdot 3=6 \quad \therefore f(1)=6$
$n=2$ 이면 $2\cdot 3\cdot 4=24 \quad \therefore f(2)=4$
$n=3$ 이면 $3\cdot 4\cdot 5=60 \quad \therefore f(3)=0$
$n=4$ 이면 $4\cdot 5\cdot 6=120 \quad \therefore f(4)=0$
$n=5$ 이면 $5\cdot 6\cdot 7=210 \quad \therefore f(5)=0$
$n=6$ 이면 $6\cdot 7\cdot 8=\times\times 6 \quad \therefore f(6)=6$
$n=7$ 이면 $7\cdot 8\cdot 9=\times\times 4 \quad \therefore f(7)=4$
$n=8$ 이면 $8\cdot 9\cdot 10=\times\times 0 \quad \therefore f(8)=0$

$\vdots$

따라서 $6,4,0,0,0$ 이 반복하여 나타남을 알 수 있다.
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)=(6+4+0+0+0)\times 4=40$

**24.** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) = f(x+12)$를 만족시키고 $f(1) = 3$일 때, $f(13) + f(37) - f(25)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(13) = f(1+12) = f(1)$
$f(25) = f(13+12) = f(13) = f(1)$
$f(37) = f(25+12) = f(25) = f(1)$
따라서 준식은 $f(1) + f(1) - f(1) = f(1) = 3$

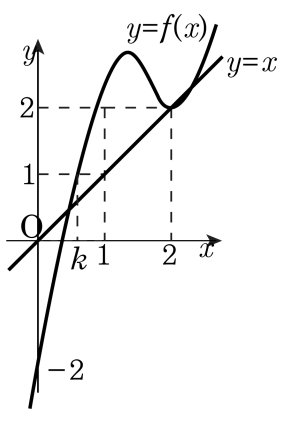
**25.** 두 함수 $f(x)=3x+2$, $g(x)=-2x+k$ 에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ 가 성립할 때, $k$ 의 값은?

① 0 ② $-1$ ③ $-2$ ④ $-3$ ⑤ $-4$

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ 에서
$-6x+3k+2=-6x-4+k$
$2k=-6$ 에서 $k=-3$

**26.** 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f,\ f^3 = f^2 \circ f,\ f^n = f^{n-1} \circ f$ )




① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 11

해설

$f(k) = 1$
$f^2(k) = f(f(k)) = f(1) = 2$
$f^3(k) = f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1)$
$= f(f(1)) = f(2) = 2$

$\vdots$

$f^{10}(k) = 2$

**27.** 함수 $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=x^2+ax+3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 $a$의 범위는? (단, $f\circ g$는 $g$와 $f$의 합성함수이다.)

① $a\leq -3, a\geq 2$　② $-1\leq a\leq 1$　③ $a\leq -2, a>3$

④ $-2\leq a\leq 2$　⑤ $-1\leq a\leq 3$

해설

$g(x)=t$라 두면,
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^2-t-2\geq 0$에서
$t\leq -1$, $t\geq 2$에서
( i ) $t\leq -1$
$x^2+ax+3\leq -1$
$x^2+ax+4\leq 0$ (부적절)
( ii ) $t\geq 2$
$x^2+ax+3\geq 2$
$x^2+ax+1\geq 0$에서
$D=a^2-4\leq 0$
$\therefore\ -2\leq a\leq 2$

**28.** $f(x)=\begin{cases} x(x\le 0) \\ x^2(x>0) \end{cases}$ , $g(x)=f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x)=g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① $-4$ ② $-2$ ③ $0$ ④ $2$ ⑤ $4$

해설

$h(0)=g^{-1}(0)=k$
$g(k)=f(k+4)=0$
$\therefore\ k+4=0$
$\therefore\ k=-4$
$\therefore\ h(0)=-4$

**29.** $f(x) = -x, g(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = \left(g^{-1} \circ f \circ g\right)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

① $x$ ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x+3$ ⑤ $x+4$

해설

$h = g^{-1} \circ f \circ g$ 에서

$$\begin{aligned} h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x)) \end{aligned}$$

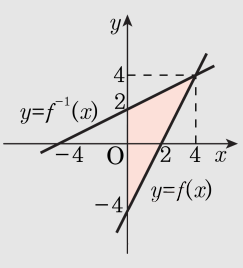
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x$ 이므로 $(h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$

**30.** 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 $y$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$ , $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4,\ 0)$ ,$(0,\ 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 $x$ 좌표를 구하기 위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
$\therefore x = 4$




따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$ 이므로
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

**31.** 점 $(6,-2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f=f^{-}1$이므로 $(f\circ f)(x)=x$
$f(x)=a(x-6)-2=ax-6a-2(a\neq 0)$로 놓으면
$f(f(x))=a(ax-6a-2)-6a-2=x$
$\therefore a^2x-6a^2-8a-2=x$
즉, $a^2=1$, $-6a^2-8a-2=0$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=-x+4$이므로
$f(-1)=-(-1)+4=5$

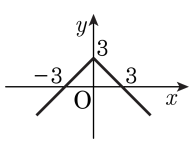
**32.** 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 $A$ 의 모든 원소 $x$ 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 $A$ 에서 $B$ 로의 함수 $f$ 의 개수는?

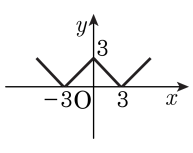
① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

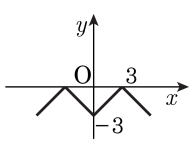
해설

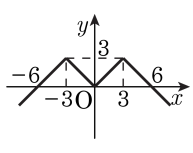
$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
$A$ 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$A$ 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

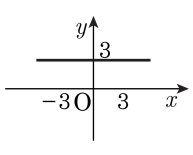
**33.** $f(x)=3-|x|$, $g(x)=|x|-3$ 일 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프는?

① 


② 


③ 


④ 


⑤ 


해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3-||x|-3|$ 이므로

$y=|x|-3$ 의 그래프는 ㉠

$y=||x|-3|$ 의 그래프는 ㉡










$y=-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉢

$y=3-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉣