1. $\sum_{k=1}^{10} k^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3025

해설

$\sum_{k=1}^{10} k^3 = \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 3025$

2. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{3}k^3$
$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$
$=3025-36=2989$

3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$ 의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$
$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$
$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 6\times 20 + 2\times 10 = 140$

4. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_n = \dfrac{n}{3}$, $b_n = 2^n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \dfrac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} + \dfrac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$

5. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$
$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$
$= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3$

6. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

7. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7i}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(385+385)=385$

8. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400 ② 425 ③ 450 ④ 475 ⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$

$$\begin{aligned}\therefore \text{(준 식)} &= \sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150 \\ &= 5\times 55+150=425\end{aligned}$$

9. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\right\}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$\sum_{n=1}^{10} \left\{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\right\}$

$= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$

$= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n)$

$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$

$= 550$

10. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(385+385)$

$=385$

11. 다음 수열의 합을 $\sum$기호를 써서 나타내면?

$$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$ ③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$ ⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

12. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$

$= \log \dfrac{3}{1} + \log \dfrac{4}{2} + \log \dfrac{5}{3} + \cdots + \log \dfrac{11}{9} + \log \dfrac{12}{10}$

$= \log \left(\dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdots \dfrac{11}{9} \cdot \dfrac{12}{10} \right)$

$= \log \dfrac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$

13. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right) = 1008$을 만족시키는 n의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n} 12 \cdot \left\{\dfrac{l(l+1)}{2}\right\} = 6\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= 6\left\{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2)$

즉, $2n(n+1)(n+2) = 1008$이므로

$n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$

$\therefore\ n = 7$

14. 다음을 계산하여라.

$1\cdot 1+2\cdot 4+3\cdot 7+\cdots+10\cdot 28$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1\cdot 1+2\cdot 4+3\cdot 7+\cdots+10\cdot 28$
$=\sum_{k=1}^{10} k\cdot(3k-2)$
$=\sum_{k=1}^{10}(3k^2-2k)$
$=3\sum_{k=1}^{10} k^2-2\sum_{k=1}^{10} k$
$=3\cdot\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}$
$=1155-110$
$=1045$

15. 수열 $1 \cdot 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 4 \cdot 8,\ 3 \cdot 6 \cdot 12,\ 4 \cdot 8 \cdot 16, \cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400　② 1100　③ 12100　④ 24200　⑤ 48400

해설

$a_k = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 11^2 = 24200$

16. n개의 수 $1 \cdot 2n,\ 2 \cdot (2n-1),\ 3 \cdot (2n-2), \cdots,\ n(n+1)$ 의 합은?

① $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$　② $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$
③ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$　④ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}$
⑤ $n(n+1)(2n+1)$

해설

주어진 수열의 제 k항은
$k\left\{2n-(k-1)\right\} = k(2n-k+1)$
$= -k^2 + (2n+1)k$
이므로 구하는 합은
$\sum_{k=1}^{n} k\left\{2n-(k-1)\right\}$
$= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k$
$= -\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \dfrac{n(n+1)}{2}$
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

17. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $3+9+\cdots+3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

㉡ $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}k(n-k)$

㉢ $1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+10\cdot 2^9=\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^{k-1}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $3+9+\cdots+3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k}$(거짓)

㉡. $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$(거짓)

㉢.주어진 수열의 일반항은 $n\cdot 2^{n-1}$ 이므로

$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+10\cdot 2^9=\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^{k-1}$(참)

18. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로
1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면
$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$

$$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$$

$\therefore S = 1320$

$\therefore \frac{S}{10} = 132$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, $\sum_{k=1}^{5} ka_k$의 값은?

① 110　② 125　③ 145　④ 160　⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 2n + 1(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

$n = 1$ 일 때,

$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

따라서

$a_n = 2n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이므로

$\sum_{k=1}^{5} ka_k = \sum_{k=1}^{5} k(2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{5}(2k^2 + k) = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$

$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$

20. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

21. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20　② 22　③ 25　④ 27　⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

22. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$　　② $n^2 + 3n$　　③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$　　⑤ $3n^2 - 1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n$

$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k - 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

23. $\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$ 을 n에 관한 식으로 나타내면?

① $60(2^n-1)$ ② $35(2^n-1)$ ③ $20(2^n+1)$

④ $20(2^n-1)$ ⑤ $16(2^n-1)$

해설

$$\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{(k-2)(2^n-1)}{2-1}\right\}$$
$$=(2^n-1)\sum_{k=1}^{10}(k-2)$$
$$=(2^n-1)\left(\frac{10\times 11}{2}-20\right)=35(2^n-1)$$

24. 수열$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$S = 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + 13\cdot 2^6 + 15\cdot 2^7 \cdots\cdots$ ㉠

$2S = 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + 13\cdot 2^7 + 15\cdot 2^8 \cdots\cdots$ ㉡

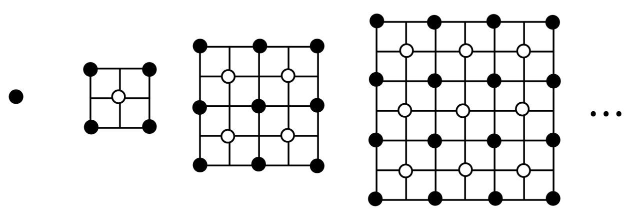
이므로 ㉠ - ㉡을 하면

$-S = 2\cdot \dfrac{(2^8-1)}{2-1} - 1 - 15\cdot 2^8$

$S = -2\cdot 2^8 + 2 + 1 + 15\cdot 2^8$

$= 13\cdot 2^8 + 3 = 3331$

25. 10개의 바둑판에 각각 흰 돌과 검은 돌을 다음과 같은 규칙으로 놓았을 때, 이 10개의 바둑판에 놓인 모든 검은 돌의 개수를 S, 흰 돌의 개수를 T라 하자. 이때, $S-T$의 값은?



① 36　② 49　③ 64　④ 81　⑤ 100

해설

n번째 바둑판에 놓인 검은 돌, 흰 돌의 개수는 각각 $n^2, (n-1)^2$ 이므로

10개의 바둑판에 놓인 검은 돌의 개수의 합 S는

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

10개의 바둑판에 놓인 흰 돌의 개수의 합 T는

$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2$

$\therefore S - T = 10^2 = 100$

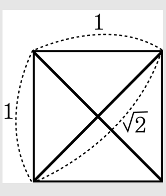
26. 자연수 $n(n \geq 4)$에 대하여 $A_n = \{x \mid x$는 한 변의 길이가1인 정n각형의 대각선의 길이$\}$라 하고, a_n을 집합 A_n의 원소의 개수라 하자. 예를 들어 $a_4 = 1$이다. 이때, $\sum_{n=4}^{25} a_n$의 값은?

① 140 ② 138 ③ 136 ④ 134 ⑤ 132

해설

A_n에서 한 변이 1인 정사각형은 대각선이 $\sqrt{2}$인 한 종류뿐이므로 $a_4 = 1$

같은 방법으로 $a_5 = 1$



$n = 2k$ $(k \geq 2)$이면 길이가 다른 대각선은

$\overline{B_1B_3}, \overline{B_1B_4}, \cdots, \overline{B_1B_{k+1}}$의 $k-1$개

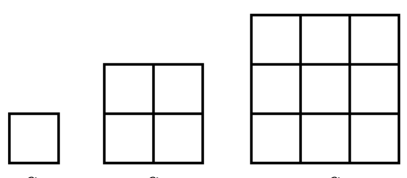
즉, $a_{2k+1} = k-1$(개)

$\therefore \sum_{n=4}^{25} a_n = \sum_{k=2}^{12}(a_{2k} + a_{2k+1})$

$= \sum_{k=2}^{12}(2k-2) = \sum_{k=1}^{12}(2k-2)$

$= 2 \cdot \dfrac{12 \times 13}{2} - 24 = 132$

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 n(n은 자연수)인 정사각형의 가로, 세로를 n등분하여 생긴 모든 정사각형의 개수를 a_n이라 한다. 예를 들어, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 14$이다. 이때, a_{10}의 값은?



a_1 a_2 a_3

① 385 ② 395 ③ 405 ④ 415 ⑤ 425

해설

크기가 작은 정사각형부터 개수를 세어 규칙을 찾으면

$a_1 = 1$

$a_2 = 2^2 + 1$

$a_3 = 3^2 + 2^2 + 1$

$\vdots$

$a_n = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2$

$\therefore a_{10} = \sum_{k=1}^{10} = \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$

28. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d \neq 0)$라 하면

$a_n = (n-1)d$

$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $nd \cdot b_n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)d$

$nd \cdot b_n = d\left\{\frac{n(n+1)}{2} - n\right\}$, $b_n = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$

$b_{27} = \frac{27-1}{2} = 13$

29. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 210

해설

수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이므로

$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $n(S_{n+1} - S_n) = S_n$

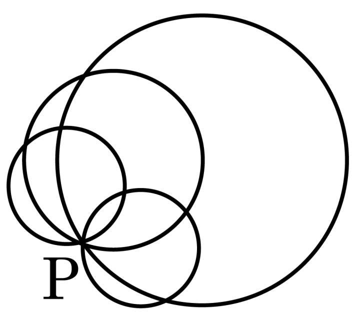
$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n}$의 양변의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 각각 대입하여 변끼리 곱하면

$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$

$\frac{S_n}{S_1} = n$ 이므로 $S_n = nS_1 = na_1 = n$

$\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = S_1 + S_2 + \cdots S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$

30. 평면 위의 한 점 P를 공유하는 n개의 원이 있다. 임의의 서로 다른 두 원은 두 점에서 만나지만 어느 세 원도 점 P 이외의 점을 공유하지 않는다. 예를 들어, 다음 그림은 조건을 만족하는 4개의 원을 그린 것이다. n개의 원에 의해 나누어지는 평면의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(101) - f(99)$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

조건에 맞도록 k개의 원에 의해 나누어지는 평면의 개수를 $f(k)$라 하면, 또 하나의 원을 추가할 때, 나누어지는 평면의 개수는 $(k+1)$개만큼 추가된 $f(k+1)$이 된다.

$\therefore\ f(k+1) = f(k) + k + 1,\ f(1) = 2$

$\therefore\ f(n) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$= 2 + \dfrac{n(n-1)}{2} + (n-1)$

$= \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

$\therefore\ f(101) - f(99)$

$= \dfrac{1}{2}(101^2 + 101 + 2) - \dfrac{1}{2}(99^2 + 99 + 2) = 201$