1. 두 집합 $A = \left\{a^2 - 2,\ a + 3\right\}$, $B = \{2,\ -2a - 1, -2a + 1\}$에 대하여 $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$일 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$A \cap B = \{2\}$에서 $2 \in A$이므로 $a^2 - 2 = 2$ 또는 $a + 3 = 2$

$a^2 - 2 = 2$에서 $a = 2$ 또는 $a = -2$

(i) $a = 2$일 때,

$A = \{2,\ 5\}$, $B = \{2,\ -5,\ -3\}$

$A \cup B = \{-5,\ -3,\ 2,\ 5\}$

(ii) $a = -2$일 때,

$A = \{1,\ 2\}$, $B = \{2,\ 3,\ 5\}$

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

(iii) $a + 3 = 2$일 때, $a = -1$

$A = \{-1,\ 2\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$

$A \cup B = \{-1,\ 1,\ 2,\ 3\}$

$\therefore a = -2$

2. 다음 중 $A \cap (A-B)^c$ 과 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A-B$

해설

$$\begin{aligned} A \cap (A-B)^c &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

3. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 집합연산이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

② $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

③ $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

④ $(A\cup C)-(B\cup C)=A-(B\cup C)$

⑤ $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cup C)$

해설

① (좌변)
$=(A-B)\cup(A-C)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=A\cap(B^c\cup C^c)$
$=A\cap(B\cap C)^c$ ($\because$ 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
$=A-(B\cap C)$
$=$우변 ($\because$ 차집합의 성질)
② (우변)
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.
③ (좌변)
$=(A-C)\cup(B-C)$
$=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=(A\cup B)\cap C^c$
$=(A\cup B)-C$ (우변) ($\because$ 분배법칙과 차집합의 성질)
④ 좌변
$=(A\cup C)-(B\cup C)$
$=(A\cup C)\cap(B\cup C)^c$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B\cup C)^c]$ ($\because$ 분배법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B^c\cap C^c)]$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup\varnothing$
$=A\cap(B\cup C)^c$
$=A-(B\cup C)$ (우변)
⑤ 좌변
$=A-(B-C)=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap(B^c\cup C)$ ($\because$ 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)\neq$ 우변 $\rightarrow$ 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.

4. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, $A_2 \cap (A_4 \cup A_8)$ 을 간단히 하면?

① A_2 ② A_3 ③ A_4 ④ A_5 ⑤ A_6

해설

$A_2 \cap (A_4 \cup A_8) = A_2 \cap A_4 = A_4 \ (\because A_4 \subset A_2)$

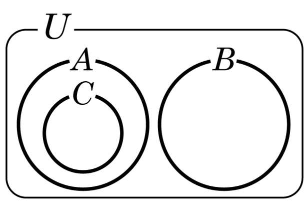
5. 두 집합 A, B에 대하여 연산 $\bigstar$를 $A \bigstar B = A^c \cap B^c$으로 정의할 때 다음 중 $(A \bigstar A) \bigstar B$와 같은 집합은?

① A　② B　③ $A \cap B$　④ $A \cup B$　⑤ $A - B$

해설

$A \bigstar A = A^c \cap A^c = A^c$ 이므로 $(A \bigstar A) \bigstar B = A^C \bigstar B = (A^C)^C \cap B^C = A \cap B^C = A - B$

6. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $A - B = B$

② $A \cup B \cup C = U$

③ $(A \cup C) \subset B$

④ $B \cap C = \varnothing$

⑤ $A^c \subset B$

해설

① $A - B = A$
② $A \cup B \cup C = A \cup B$
③ $(A \cup C) \not\subset B$
⑤ $B \subset A^c$

7. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle$를 $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 3, 4\}, A\triangle B = \{2, 3, 5, 8\}$ 이라고 할 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하면?

① 9　② 12　③ 15　④ 18　⑤ 20

해설

$A\triangle B$ 는 $(A\cup B)-(A\cap B)$ 이므로
A 의 1, 4 는 $A\cap B$ 의 원소들이다.
또한 5, 8 은 B 의 원소들임을 알 수 있다.
$\therefore\ B = \{1,\ 4,\ 5,\ 8\}$
$\therefore\ 1+4+5+8 = 18$

8. 임의의 두 집합 X, Y에 대하여, 연산 $\triangle$을 $X \triangle Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$로 정의한다.1에서 30까지의 정수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 차례로 A, B, C라 할 때, $(A \triangle B) \triangle C$의 원소의 개수를 구하면?

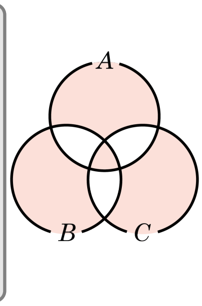
① 10개　② 13개　③ 15개　④ 17개　⑤ 19개

해설

$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = (X - Y) \cup (Y - X)$

$(A \triangle B) \triangle C$ 의 벤다이어그램은 다음과 같다.

$\therefore\ n((A \triangle B) \triangle C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + 4n(A \cap B \cap C) = (15 + 10 + 6) - 2(5 + 2 + 3) + 4 = 15$(개)



9. 50명의 학생 중 사과를 좋아하는 학생은 28명, 배를 좋아하는 학생은 42명이었다. 사과, 배 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값을 x, 최솟값을 y라 할 때, $x+y$의 값을 구하면?

① 48 ② 54 ③ 62 ④ 70 ⑤ 83

해설

사과를 좋아하는 학생 : A, 배를 좋아하는 학생 : B, 전체학생 : U 라고 두면

$n(A)=28,\ n(B)=42,\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le 50$

$\therefore\ n(A\cap B)\ge 28+42-50=20$

$n(A\cap B)$ 이 최대가 될 때는 $A\subset B$ 일 때, 즉 $A\cap B=A$ 가 되는 경우이다.

$\therefore 20\le n(A\cap B)\le 28$

$x=28,\ y=20$

$\therefore\ x+y=48$

10. 미영이네 반 학생들에 대하여 수학, 영어 두 과목에 대한 선호도 조사를 실시하였다. 그 결과 수학을 좋아하는 학생은 36명, 영어를 좋아하는 학생은 27명이었고, 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 15명이었다. 이 때, 수학 또는 영어 한 과목만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

① 27명　② 30명　③ 33명　④ 36명　⑤ 39명

해설

수학을 좋아하는 학생의 집합을 A, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면 $n(A) = 36$, $n(B) = 27$, $n(A \cap B) = 15$이므로
$n(A \cup B) = 36 + 27 - 15 = 48$
따라서 수학 또는 영어 한 과목만을 좋아하는 학생 수는 $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 48 - 15 = 33$ (명)