1. $-2 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 2x - 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3　　② 7　　③ -2　　④ 0　　⑤ 1

해설

$y = (x-1)^2 - 3$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 범위에 포함되므로
$x = 1$에서 최솟값을 $x = -2$에서 최댓값을 갖는다.
(최댓값)$=(-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$
(최솟값)$=-3$

2. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7(-3 \le x \le 1)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 4　　② 7　　③ 8　　④ 11　　⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$이다.
따라서 최댓값 $a = 8$이고, 최솟값 $b = 4$이므로 $a + b = 12$

3. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x + 5(2 \le x \le 5)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, ab의 값을 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$y = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.
꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$x = 2$ 일 때 $y = 2\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1$

$x = 5$ 일 때 $y = 2\left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 25$

따라서 최댓값 $a = 25$ 이고, 최솟값 $b = 1$ 이므로 $ab = 25$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $f(1) = f(3) = 8$이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값을 구하면?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 (2, 5)이므로
이차함수는 $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.
$f(3) = 8$이므로 $x = 3$, $y = 8$을 대입하면
$a + 5 = 8 \quad \therefore\ a = 3$ 이므로
$f(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$
$\therefore\ a + b + c = 8$

5. 이자함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

6. 두 이차함수의 그래프 $y = x^2 - 2ax + 4$, $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$가 모두 x축과 교점을 갖도록 상수 a의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \le a \le -5$ ② $-6 \le a \le -2$ ③ $-3 \le a \le 0$
④ $2 \le a \le 5$ ⑤ $3 \le a \le 7$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면
$x^2 - 2ax + 4 = 0$에서

$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 \cdot 4 \ \ge 0,\ a^2 - 4 \ge 0,\ \ (a+2)(a-2) \ge 0$

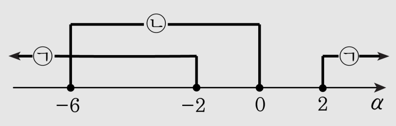
$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면
$2x^2 - 2ax + \left(a^2 + 3a\right) = 0$에서

$\frac{D_2}{4} = a^2 - 2\left(a^2 + 3a\right) \ge 0,\ a^2 + 6a \le 0,\ a(a+6) \le 0$

$\therefore -6 \le a \le 0 \cdots\cdots$ ㉡

이 때, ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 그래프 모두 x축과 교점을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 위의 수직선에게 ㉠과 ㉡의 공통 부분이므로 $-6 \le a \le -2$

7. 직선 $y=2x+a$ 와 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

직선 $y=2x+a$ 와 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로
이차방정식 $2x+a=x^2-1$, 즉 $x^2-2x-a-1=0$ 의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1+a+1=0$
$\therefore a=-2$

8. 직선 $y=-x+1$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동 하였더니 이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프에 접하였다. 이때, 상수 m의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $y=-x+1$을 x축의 방향으로
m만큼 평행이동하면
$y=-(x-m)+1=-x+m+1$
이 직선이 $y=x^2-3x$의 그래프와 접하므로
이차방정식 $x^2-3x=-x+m+1$,
즉, $x^2-2x-m-1=0$에서
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-m-1)=0$
$2+m=0 \quad \therefore m=-2$

9. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

이차방정식 $2x + k = x^2$,
즉 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -k$
두 그래프의 교점의 좌표를
$(\alpha,\ 2\alpha + k),\ (\beta,\ 2\beta + k)$ 라 하면
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로
$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$ 에서
$\sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$
$\therefore |\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서
$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4(-k),\ 8 = 4 + 4k$
$\therefore\ k = 1$

10. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면
$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$
$(a - b)p + a - b = 0$
$(a - b)(p + 1) = 0$
$a \neq b$ 이므로 $p = -1$
그런데 교점이 x 축 위에 있으므로
교점의 y 좌표는 0 이다.
$\therefore 1 + a + b = 0$
$\therefore a + b = -1$

11. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$
$-1 \le x \le 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는
$x = 1$ 일 때, 최대이고
최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$
$\therefore k = 2$
따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로
$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.
$-1 \le x \le 2$에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$
이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값
-1을 갖는다.

12. $a-1 \le x \le a+4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x-a)^2 - a^2 + 4$
이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x의 값의 범위에 속하므로
$x = a$ 일 때 최솟값, $x = a + 4$ 일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(a+4) = (a+4)^2 - 2a(a+4) + 4 = 4$
$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 8a + 4 = 4$
$a^2 = 16$
$\therefore a = 4 \ (a > 0)$

13. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $1 \le x \le 4$ 에서 $f(f(x))$ 의 최솟값은?

① -6　　② -5　　③ -4　　④ -3　　⑤ -2

해설

$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$
$1 \le x \le 4$ 에서 $-2 \le f(x) \le 2$ 이므로
$f(x) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(t) = t^2 - 4t + 2 \\ &= (t-2)^2 - 2(-2 \le t \le 2) \end{aligned}$$

따라서, $t = 2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

14. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 2x - y = 0$ 에서 $y = x^2 - 2x$
이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면
$3x^2 - 2\left(x^2 - 2x\right) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$
따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

15. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2 + (2-x)y + x^2 = 0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D = (2-x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$

$3x^2 + 4x - 4 \leq 0,\ \ (x+2)(3x-2) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.