

1. $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3

② 7

③ -2

④ 0

⑤ 1

해설

$y = (x - 1)^2 - 3$ 이고 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 x 의 범위에 포함되므로

$x = 1$ 에서 최솟값을 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$(\text{최댓값}) = (-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$$

$$(\text{최솟값}) = -3$$

2. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7$ ($-3 \leq x \leq 1$)의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 4

② 7

③ 8

④ 11

⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x + 1)^2 + 8$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$ 이고, 위로 볼록한 포물선이다.

주어진 구간의 양 끝값을 구하면,

$$x = -3 \text{ 일 때 } y = -(-3 + 1)^2 + 8 = 4$$

$$x = 1 \text{ 일 때 } y = -(1 + 1)^2 + 8 = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 최댓값 $a = 8$ 이고, 최솟값 $b = 4$ 이므로 $a + b = 12$

3. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x + 5$ ($2 \leq x \leq 5$)의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 1

② 4

③ 9

④ 16

⑤ 25

해설

$$y = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.

꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$$x = 2 \text{ 일 때 } y = 2\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$x = 5 \text{ 일 때 } y = 2\left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 25$$

따라서 최댓값 $a = 25$ 이고, 최솟값 $b = 1$ 이므로 $ab = 25$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $f(1) = f(3) = 8$ 이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$ 이므로

이차함수는 $f(x) = a(x - 2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.

$f(3) = 8$ 이므로 $x = 3, y = 8$ 을 대입하면

$a + 5 = 8 \quad \therefore a = 3$ 이므로

$f(x) = 3(x - 2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$

$\therefore a + b + c = 8$

5. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ ($0 \leq x \leq 3$) 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 일 때 최솟값 : } -4,$$

$$x = 3 \text{ 일 때 최댓값 : } 0$$

$$\text{최댓값} + \text{최솟값} = -4$$

6. 두 이차함수의 그래프 $y = x^2 - 2ax + 4$, $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$ 가 모두 x 축과 교점을 갖도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \leq a \leq -5$

② $-6 \leq a \leq -2$

③ $-3 \leq a \leq 0$

④ $2 \leq a \leq 5$

⑤ $3 \leq a \leq 7$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ 에서

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 \cdot 4 \geq 0, a^2 - 4 \geq 0, (a+2)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2 \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

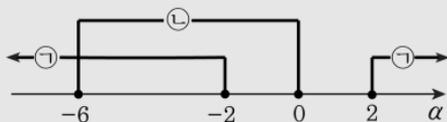
또, 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax + a^2 + 3a$ 의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면

$$2x^2 - 2ax + (a^2 + 3a) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 2(a^2 + 3a) \geq 0, a^2 + 6a \leq 0, a(a+6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 0 \dots\dots \textcircled{\omin�}$$

이 때, $\textcircled{\ominus}$, $\textcircled{\omin�}$ 을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 그래프 모두 x 축과 교점을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는 위의 수직선에 $\textcircled{\ominus}$ 과 $\textcircled{\omin�}$ 의 공통 부분이므로 $-6 \leq a \leq -2$

7. 직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $2x + a = x^2 - 1$, 즉 $x^2 - 2x - a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + a + 1 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

8. 직선 $y = -x + 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동 하였더니 이차함수 $y = x^2 - 3x$ 의 그래프에 접하였다. 이때, 상수 m 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $y = -x + 1$ 을 x 축의 방향으로
 m 만큼 평행이동하면

$$y = -(x - m) + 1 = -x + m + 1$$

이 직선이 $y = x^2 - 3x$ 의 그래프와 접하므로

이차방정식 $x^2 - 3x = -x + m + 1$,

즉, $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-m - 1) = 0$$

$$2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$$

9. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

이차방정식 $2x + k = x^2$,

즉 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -k$$

두 그래프의 교점의 좌표를

$(\alpha, 2\alpha + k), (\beta, 2\beta + k)$ 라 하면

두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (2\alpha - 2\beta)^2} = 2\sqrt{10} \text{ 에서}$$

$$\sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$$

이때, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서

$$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4(-k), 8 = 4 + 4k$$

$$\therefore k = 1$$

10. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

$$\therefore a + b = -1$$

11. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 일 때, 최대이고

최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$

$$\therefore k = 2$$

따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로

$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$

이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값

-1을 갖는다.

12. $a - 1 \leq x \leq a + 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4$$

이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x 의 값의 범위에 속하므로
 $x = a$ 일 때 최솟값, $x = a + 4$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$\text{즉, } f(a + 4) = (a + 4)^2 - 2a(a + 4) + 4 = 4$$

$$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 8a + 4 = 4$$

$$a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 \quad (a > 0)$$

13. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(f(x))$ 의 최솟값은?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$f(x) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(t) = t^2 - 4t + 2 \\ &= (t - 2)^2 - 2 \quad (-2 \leq t \leq 2) \end{aligned}$$

따라서, $t = 2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

14. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 2x - y = 0$ 에서 $y = x^2 - 2x$

이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면

$$3x^2 - 2(x^2 - 2x) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

15. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$

② 1

③ 2

④ $\frac{11}{5}$

⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2 + (2-x)y + x^2 = 0$$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (2-x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$$

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0, \quad (x+2)(3x-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.