1. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$
$\therefore\ a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

2. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

3. $a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n \geq 1)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$의 값은?

① $2^{10} + 6$　② $2^{10} + 0$　③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$　⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$꼴로 변형하면

$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$

즉, $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \dfrac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10$

$= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$

4. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}(n \geq 2)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 2014항은?

① 5　② 3　③ −2　④ −3　⑤ −5

해설

$a_1 = 3$
$a_2 = 5$
$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$
$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$
$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$
$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$
$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$
$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$
$\vdots$
이므로 수열 $\{a_n\}$은 $3,\ 5,\ 2,\ -3,\ -5,\ -2$가 계속해서 반복된다.
이 때, $2014 = 6 \times 335 + 4$이므로
$a_{2014} = a_4 = -3$

5. $a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3=\dfrac{2+1}{3}=1$

$a_4=\dfrac{1+1}{2}=1$

$a_5=\dfrac{1+1}{1}=2$

$a_6=\dfrac{2+1}{1}=3$

$a_7=\dfrac{3+1}{2}=2$

$\vdots$

$\therefore\ a_1=a_6=a_{11}=\cdots=3$

$a_2=a_7=a_{12}=\cdots=2$

$a_3=a_8=a_{13}=\cdots=1$

$a_4=a_9=a_{14}=\cdots=1$

$a_5=a_{10}=a_{15}=\cdots=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n=13(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+a_1$

$=13\times 9+3=120$

6. 높이가 h인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n번째 날의 탑의 높이를 a_n이라 하면 $(n+1)$째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$a_1 = \frac{h}{2}$ 이고, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$

$\therefore a_n = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10} = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{h}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

즉, $a = \frac{h}{3}$ 이므로 $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$

7. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
$= 3(7m' + 4^k)$
$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
$7^n - 4^n$은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$일 때 증명한 것이다.
∴ ①

8. 다음 중 수열 $\{a_n\}$이 조화수열임을 나타내는 식이 아닌 것은?

① $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} =$(일정한 수) ② $\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$

③ $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = 0$ ④ $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2a_n \cdot a_{n+2}}$

⑤ $a_n = \frac{1}{pn+q}$(단, $pq \neq 0$)

해설

①, ②, ③, ⑤는 모두 $\{a_n\}$이 조화수열임을 나타내는 식이다. ④는 조화수열을 나타내는 식이 아니다. 조화수열을 나타내는 식은 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$이다.

9. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}\,(n = 1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3,\ \frac{1}{a_2} = 6$이므로

$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n,\ a_n = \frac{1}{3n}$

$a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore\ a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$

10. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4 의 값은?

① 26　　② 31　　③ 36　　④ 46　　⑤ 51

해설

$a_1 = 2$
$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$