

1.  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_9$ 의 값은?

① 32

② 64

③ 128

④ 256

⑤ 512

해설

수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$$

2.  $a_1 = 1, a_{n+1} = (n+1)a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 수열  $\{a_n\}$ 이 정의될 때,  $a_n$ 을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수  $n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의  $n$ 에  $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$$

3.  $a_1 = 4, a_2 = 6, a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$  ( $n \geq 1$ ) 으로 정의되는 수열  $\{a_n\}$  에 대하여  $\sum_{k=1}^{10} a_n$  의 값은?

①  $2^{10} + 6$

②  $2^{10} + 0$

③  $2^{10} + 18$

④  $2^{11} + 9$

⑤  $2^{11} + 18$

### 해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$  꼴로 변형하면

$$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$$

$$\text{즉, } a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

이때,  $a_{n+1} - a_n = b_n$  이라 하면 수열  $\{a_n\}$  의 계차수열  $\{b_n\}$  은 첫째항이  $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$  이고 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10 \\ &= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18 \end{aligned}$$

4.  $a_1 = 3, a_2 = 5, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$ 로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서 제 2014 항은?

① 5

② 3

③ -2

④ -3

⑤ -5

해설

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$$

$\vdots$

이므로 수열  $\{a_n\}$ 은 3, 5, 2, -3, -5, -2가 계속해서 반복된다.

이 때,  $2014 = 6 \times 335 + 4$ 이므로

$$a_{2014} = a_4 = -3$$

5.  $a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{66} a_n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$$a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots) \text{이므로}$$

$$a_3 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$a_7 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$\vdots$

$$\therefore a_1 = a_6 = a_{11} = \dots = 3$$

$$a_2 = a_7 = a_{12} = \dots = 2$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = \dots = 1$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = \dots = 1$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = \dots = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{66} a_n &= 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1 \\ &= 13 \times 9 + 3 = 120 \end{aligned}$$

6. 높이가  $h$ 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가  $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$  이 되었을 때,  $\frac{a}{h}$ 의 값은?

①  $\frac{1}{4}$

②  $\frac{1}{3}$

③  $\frac{1}{2}$

④  $\frac{3}{4}$

⑤  $\frac{3}{2}$

### 해설

$n$  번째 날의 탑의 높이를  $a_n$ 이라 하면  $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이  $a_n$ 과 그 높이의 절반인  $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$$a_1 = \frac{h}{2} \text{이고, } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$\text{즉, } a = \frac{h}{3} \text{이므로 } \frac{a}{h} = \frac{1}{3}$$

7. 다음은 자연수  $n$ 에 대한 명제  $P(n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제  $P(n)$ 으로 알맞은 것은?

증명

(ii)  $n = k$ 일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면

이라 놓을 수 있다.

$$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$$

$$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$$

$$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$$

$$= 3(7m' + 4^k)$$

.....

- ①  $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어떨어진다.
- ②  $7^n - 4^n$ 은 7으로 나누어떨어진다.
- ③  $7^n - 4^n$ 은  $n$ 으로 나누어떨어진다.
- ④  $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 7로 나누어떨어진다.
- ⑤  $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은  $n$ 으로 나누어떨어진다.

해설

$$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$$

로 변형하였으므로

$7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어 떨어진다는  
것을  $n = k + 1$ 일 때 증명한 것이다.

∴ ①

8. 다음 중 수열  $\{a_n\}$ 이 조화수열임을 나타내는 식이 아닌 것은?

①  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = (\text{일정한 수})$

②  $\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$

③  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = 0$

④  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2a_n \cdot a_{n+2}}$

⑤  $a_n = \frac{1}{pn + q} \text{ (단, } pq \neq 0 \text{)}$

### 해설

①, ②, ③, ⑤는 모두  $\{a_n\}$ 이 조화수열임을 나타내는 식이다.

④는 조화수열을 나타내는 식이 아니다. 조화수열을 나타내는

식은  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 이다.

9. 수열  $\{a_n\}$ 이 다음을 만족할 때,  $a_3 + a_4$ 의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{6}, a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1, 2, 3)$$

①  $\frac{2}{9}$

②  $\frac{5}{12}$

③  $\frac{7}{16}$

④  $\frac{5}{24}$

⑤  $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열  $\{a_n\}$ 은 조화수열이다. 따라서

수열  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이고, 이때,  $\frac{1}{a_1} = 3$ ,  $\frac{1}{a_2} = 6$ 이므로

$$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n, a_n = \frac{1}{3n}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$$

10.  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 - n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_4$ 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$$