1. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } a \text{ 이하인 } 5\text{의 배수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 32 개가 되기 위한 자연수 a 의 값은?

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

해설

$32 = 2^5$ 이므로 집합 A 의 원소의 개수는 5 개이어야 한다.
$A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}$ 이므로 $a = 25$ 이다.

2. 두 유한집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이다.

② $A \neq B$ 이면 $n(A) \neq n(B)$ 이다.

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

⑤ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

해설

① $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ 이면 $A \subset B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.
② $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $A \neq B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.
③ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.
④ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이고, $A \neq B$ 이다.

3. 전체집합 $U = \left\{3 \times x + 1 | x < 10,\ x\text{는 자연수}\right\}$ 의 부분집합 A, B 가 있다.
$A^c \cap B^c = \{28\}$, $(A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 10, 19, 25\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$U = \{3 \times x + 1 | x < 10$, x 는 자연수$\} = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$,
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{28\}$,
$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{4, 10, 19, 25\}$,
전체집합 U 는 $A - B$, $B - A$, $(A \cup B)^c$, $A \cap B$ 로 이루어지므로,
$A \cap B = \{7, 13, 16, 22\}$ 이다.
$\therefore n(A \cap B) = 4$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$$
$$= (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c) \text{ 이므로}$$

$$(A \star B) \star A$$
$$= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c]$$
$$\cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}]$$
$$= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A]$$
$$\cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}]$$
$$= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}]$$
$$\cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)]$$
$$= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)]$$
$$= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\}$$
$$= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\}$$
$$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B$$

5. 실수 전체의 집합 R의 한 부분집합 S에 대하여 $P = \{x \in S \mid -\frac{1}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2}\}$이라고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

① $S = R$이면, P는 공집합이다.

② $S = R$이면, P는 유한집합이다.

③ S가 유리수 전체의 집합이면, P는 유한집합이다.

④ S가 정수 전체의 집합이면, P는 유한집합이다.

⑤ S가 자연수 전체의 집합이면, P는 무한집합이다.

해설

$-\frac{1}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2}$ 에서 $1 - \frac{1}{2} \le x \le 1 + \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ 여기서 x가 정수이면 $x = 1$

즉, P는 유한집합이 된다.

6. 집합 $A_k = \{x|x$는 k의 배수$\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A_2 \cap A_4 \cap A_{16} = A_{16}$　② $A_3 \cup A_6 \cup A_9 = A_3$
③ $A_4 \cup A_{12} = A_4$　④ $A_6 \cup A_{12} = A_6$
⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_9$

해설

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_{18}$

7. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례를 모두 구할 때, 그 개수는?

n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 경우가 반례가 된다.
n^2 이 12의 배수가 되지만 n 은 12의 배수가 되지 않아야 하므로 $n = 2 \times 3 \times$ (홀수) 의 형태가 되어야 한다. 이에 따라 구해보면$n = 2 \times 3 \times 1,\ 2 \times 3 \times 3,\ \cdots\ , 2 \times 3 \times 15$
$\therefore n = 6, 18, 30, 42, 54, 66, 78, 90$ (8 개)

8. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=1$일 때 $ab+bc+ca$의 최댓값은?

① 1　　② $\sqrt{3}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{9}$　　⑤ $\frac{2}{11}$

해설

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$이므로

$ab+bc+ca$의 최댓값은 등호가 성립하는 경우이다.

또 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로

$a+b+c=1$에서 $a=b=c=\frac{1}{3}$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2 \ge ab+bc+ca$

$\therefore ab+bc+ca$의 최댓값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

9. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b| \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

② $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b|$

③ $|a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

④ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b|$

⑤ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

해설

$|a|>0,\ |b|>0$이므로

$\dfrac{|a|+|b|}{2} \ge \sqrt{|a||b|} \ge \dfrac{2|a||b|}{|a|+|b|}$

$\therefore \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \cdots$ ㉠

한편 $(\sqrt{2(a^2+b^2)})^2-(|a|+|b|)^2$

$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \ge 0$

$\therefore (\sqrt{2(a^2+b^2)})^2 \ge (|a|+|b|)^2$

$\therefore |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

10. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

> ㉠ $2 \in A$
>
> ㉡ $m,\ n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$
$2 \in A,\ 2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$
이와 같은 과정을 반복하면
$2^4 \in A,\ 2^5 \in A,\ 2^6 \in A, \cdots$
따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$ 이다.

11. 다음 조건을 만족하는 집합 A 에 대하여 $\frac{1}{2} \in A$ 일 때, 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 의 원소들의 합을 구하면?

$a \in A$ 이면 $\frac{a}{a-1} \in A$ (단, $a \neq 1$)

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

해설

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \in A$

$-1 \in A$ 이면 $\frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \in A$

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1 \in A \cdots$

따라서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 는 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ 이므로 원소들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

12. 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 S 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 옳지 않은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

Ⅰ. $5 \in S$, $7 \in S$
Ⅱ. $p \in S$, $q \in S$ 이면 $p+q \in S$

① $5n \in S$　② $7n \in S$　③ $12n+1 \in S$
④ $12n+2 \in S$　⑤ $17n+3 \in S$

해설

① $p=q=5$ 이면 $p+q=5\times 2 \in S$
$p=5\times 2$, $q=5$이면 $p+q=5\times 3 \in S$
이와 같이 계속하면 $5n \in S$
② ①과 같은 방법으로 $7n \in S$
③ S 를 작은 수부터 차례로 써 보면
$S=\{5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 14, \ldots\}$ 이므로
$13 \notin S \ \leftarrow\ 13 = 12\times 1+1$
④ $12n+2 = 5n+7n+7-5 = 5(n-1)+7(n+1)$ 이므로
①, ②에 의해서 $12n+2 \in S$
⑤ $17n+3 = 10n+7n+10-7$
$= 5(2n+2)+7(n-1) \in S$

13. 집합 $M = \{a + bi | a^2 + b^2 = 1,\ a,\ b$는 실수$\}$ 에 대하여 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

ㄱ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $z_1 + z_2 \in M$

ㄴ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $z_1 z_2 \in M$

ㄷ $z_1 \in M,\ z_2 \in M$ 이면 $\dfrac{z_1}{z_2} \in M$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$z_1 = a + bi \in M$, $z_2 = c + di \in M$ 이라 하자.

ㄱ $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$ 에서

$$\begin{aligned}&(a+c)^2 + (b+d)^2\\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2\\ &= 2 + 2(ac + bd)\text{이므로}\end{aligned}$$

$2 + 2(ac + bd) \neq 1$ 일수 있으므로 $z_1 + z_2 \in M$ 이라 할 수 없다.

ㄴ $$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci - bd\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\text{에서}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2\\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2\\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1\ (\because c^2 + d^2 = 1\ )\end{aligned}$$

$\therefore\ z_1 \cdot z_2 \in M$

ㄷ $$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di}\\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}\\ &= \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2}\\ &= (ac + bd) + (bc - ad)i\\ &(\because c^2 + d^2 = 1)\text{에서}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2\\ &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2\\ &= a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 = (a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)d^2\\ &= c^2 + d^2 = 1\end{aligned}$$

$\therefore\ \dfrac{z_1}{z_2} \in M$

14. 집합 A 에 대하여 $P(A) = \{X | X \subset A\}$ 라고 하자. $A = \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?

㉠ $\{\{1,\ 2\}\} \in P(A)$	㉡ $\{\{1,\ 2\}\} \subset P(A)$
㉢ $\varnothing \in P(A)$	㉣ $\varnothing \subset P(A)$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

$P(A)$는 집합 A의 부분집합으로 이루어진 집합이다. 즉, $P(A) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{\{1,\ 2\}\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ \{1,\ 2\}\},\ \{2,\ \{1,\ 2\}\},\ A\}$
따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 4개가 모두 옳다.

15. 유리수 전체의 집합을 Q 라 하고, 자연수 $n(n \geqq 2)$ 에 대하여 집합 A_n 을 $A_n = \left\{ x \,\middle|\, x - [x] = \frac{1}{n},\ x \in Q \right\}$ 로 정의할 때, 다음 중에서 옳은 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다.)

① $-\frac{4}{3} \in A_3$

② $A_2 \subset A_4$

③ $A_4 \subset A_2$

④ $A_2 \cap A_3 = \varnothing$

⑤ $A_5 = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \cdots, \frac{51}{5} \right\}$

해설

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타내므로 간단하게 정수라고 생각하면 되고, $x - [x]$ 는 x 의 소수 부분이다. 따라서 구하고자 하는 집합 A_n 의 원소 x 는 $x = [x] + \frac{1}{n}$ 이다.

$[x]$가 정수이므로 집합 A_n 은

$A_n = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{n},\ -1+\frac{1}{n},\ 0+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ 2+\frac{1}{n}, \cdots \right\}$ 이 되고,

n 대신에 2, 3, 4, 5, $\cdots$ 를 각각 대입해서 $A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5, \cdots$ 를 구해 보면

$$A_2 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{2},\ -1+\frac{1}{2},\ 0+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2}, \cdots \right\}$$

$$= \left\{ \cdots, -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}, \cdots \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{3},\ -1+\frac{1}{3},\ 0+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{3}, \cdots \right\}$$

$$= \left\{ \cdots, -\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3}, \cdots \right\}$$

$$A_4 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{4},\ -1+\frac{1}{4},\ 0+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4},\ 2+\frac{1}{4}, \cdots \right\}$$

$$= \left\{ \cdots, -\frac{7}{4},\ -\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{9}{4}, \cdots \right\}$$

$$A_5 = \left\{ \cdots, -2+\frac{1}{5},\ -1+\frac{1}{5},\ 0+\frac{1}{5},\ 1+\frac{1}{5},\ 2+\frac{1}{5}, \cdots \right\}$$

$$= \left\{ \cdots, -\frac{9}{5},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{11}{5}, \cdots \right\}$$

이므로 $A_2 \cap A_3 = \varnothing$ 임을 알 수 있다.