

1. 원점을 중심으로 하고, 점 (3, -4)를 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + 2y^2 = 41$ ② $2x^2 + y^2 = 34$ ③ $x^2 + y^2 = 25$
④ $x^2 + y^2 = 16$ ⑤ $x^2 + y^2 = 9$

해설

구하는 원의 반지름을 r 이라 하면

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

① 이 점 (3, -4) 를 지나므로

$$3^2 + (-4)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$$

이 때, ①은 $x^2 + y^2 = 25$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

- ① 중심이 (2, 1) 이고 반지름의 길이가 1 인 원
- ② 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ③ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ④ 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원
- ⑤ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$
 $\therefore$ 중심은 (2, -1) 이고,
반지름은 4 이다.

3. 방정식 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

- ① 중심이 $(0, 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원
- ② 중심이 $(0, 1)$ 이고, 반지름이 2 인 원
- ③ 중심이 $(0, 1)$ 이고 반지름이 4 인 원
- ④ 중심이 $(0, -1)$ 이고 반지름이 2 인 원
- ⑤ 중심이 $(0, -1)$ 이고 반지름이 1 인 원

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 중심은 $(0, 1)$ 이고,
반지름은 2 인 원이다.

4. 방정식 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, a, b, c 는 모두 0 이 아니다.)

- ① $b^2 - 4c = 0$ ② $b^2 + 4c = 0$
③ $a^2 - 4c = 0$ ④ $a^2 + b^2 - 4c = 0$
⑤ $a^2 + b^2 + 4c = 0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x = 0$ 을 대입하면 되므로
 $y^2 + by + c = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
원이 y 축과 접하려면 $\textcircled{1}$ 의
식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D = 0$
 $\therefore D = b^2 - 4c = 0$

5. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심의 좌표는 (r, r) 이다.

따라서, 구하는 원의 방정식을

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$

$$\therefore r = 3$$

따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

6. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면

제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면

중심이 (r, r) 이다.

$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,

$(r-1)(r-5) = 0$

$\therefore r = 1$ 또는 5

$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$\therefore 1 + 5 = 6$

7. 원 $x^2 + y^2 + 2y = 0$ 과 직선 $y = mx - 3$ 이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

㉠ $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

㉡ $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

㉢ $-1 < m < 1$

㉣ $-2 < m < 2$

㉤ $-3 < m < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ y = mx - 3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 ①에 대입하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 - 4mx + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 3(m^2 + 1) = m^2 - 3$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4} = m^2 - 3 < 0$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

해설

①, ②을 변형하면

$$\text{각각 } x^2 + (y + 1)^2 = 1, mx - y - 3 = 0$$

이 때, 원의 중심 $(0, -1)$ 에서

직선 $y = mx - 3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\sqrt{m^2 + 1} < 2, m^2 < 3$$

$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

8. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

9. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$