

1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ 을 풀면?

- ① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2
- ② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1
- ③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2
- ④ $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ (중근)
- ⑤ $x = -1, \frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

-1		2	-1	-6	-1	2	
		-2	3	3	-2		
		2	-3	-3	2	0	
2			4	2	-2		
		2	1	-1		0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은
 $(x+1)(x-2)(2x^2+x-1) = 0$
 $(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$
 $\therefore x = -1, \frac{1}{2}, 2$

2. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$x^3 + 3^3 = 0, (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$\therefore x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{합} : -3 + \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$ 의 모든 근의 합을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1, 1, 2$$

$$\therefore -1+1+2=2$$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
 $\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$
 $\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

5. 다음 방정식을 만족하는 x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -5$

▷ 정답 : $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡에서 $x = 2y - 5 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$\therefore y = 0$

$y = 0$ 을 ㉢에 대입하면 $x = -5$

$\therefore x = -5, y = 0$

6. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots \textcircled{㉠} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

- ① (2,3)

② (-2,3)

③

(3,2)
- ④ (3,-2)

⑤ (-3,-2)

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \\ 2x + 3y = 12 & \cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{cases}$$

㉢ - ㉣×3을 하면 $-4y = -8$

∴ $y = 2$ 를 ㉣대입하면 $x = 3$

∴ $x = 3, y = 2$

7. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

8. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + ay = 10 \\ x - y = b \end{cases}$$

의 해가 $x = 2$, $y = -3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$x = 2$, $y = -3$ 을

두 방정식

$2x + ay = 10$, $x - y = b$ 에 대입하면

모두 성립시키므로 $4 - 3a = 10$

$\therefore a = -2$

$2 - (-3) = b$

$\therefore b = 5$

$\therefore a + b = 3$

9. 다음 연립방정식의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 10 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 3x + y - 2z = 3 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ x - 2y + z = 5 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢} \times 3$ 을 하면 $-x + 3y = -5 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \times 2$ 를 하면 $5x - 3y = 13 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$
 $\textcircled{㉣} + \textcircled{㉤}$ 을 하면 $4x = 8 \therefore x = 2$
 $x = 2$ 를 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면 $-2 + 3y = -5 \therefore y = -1$
또, $x = 2$, $y = -1$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면
 $2 - 2 \cdot (-1) + z = 5$
 $\therefore z = 1$
 $\therefore x = 2, y = -1, z = 1$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4 + 1 + 1 = 6$

10. 연립방정식 $\begin{cases} px+y=1 \\ x+py=1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때의 p 값으로 알맞은 것은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -2

해설

$ax+by=c, dx+ey=f$ 일때,

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ 이면 해가 없음,

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ 이면 해가 무수히 많다.

$p = \frac{1}{p} \neq 1$

$\therefore p = -1$

11. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x = 1, x = -1 \pm 2i$
- ② $x = -1, x = 1 \pm 2i$
- ③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$
- ④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$
- ⑤ $x = 1$

해설

1	1	0	0	-4	3
	1	1	1	-3	
1	1	1	1	-3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0, x=1, -1\pm\sqrt{2}i$

12. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{가장 작은 근 } a = -\sqrt{6}, \text{ 가장 큰 근 } b = \sqrt{6}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

13. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
 $\therefore k = 3$

14. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

- (가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

- ① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$
- ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$
⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$
- ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

15. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

- ① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$
③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$
④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면
다른 한 근은 $1-i$ 이다.
 $\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
 $(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$
 $\therefore$ ①이 조건에 맞다

16. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

17. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

18. 연립방정식
$$\begin{cases} 2x + y + z = 12 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$
 의 해를 $x = a, y = b, z = c$ 라 할 때, abc 의 값은?

① -14 ② -7 ③ 0 ④ 7 ⑤ 14

해설

$$\begin{cases} 2x + y + z = 12 & \cdots \textcircled{㉠} \\ x + 2y + z = 3 & \cdots \textcircled{㉡} \\ x + y + 2z = 5 & \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \text{을 하면 } 4(x + y + z) = 20$$

$$\therefore x + y + z = 5 \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉣} \text{에서 } x = 7$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉣} \text{에서 } y = -2$$

$$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉣} \text{에서 } z = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -2, c = 0$$

$$\therefore abc = 0$$

19. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5, 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 2,$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = -1$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

- ① $(2, 1)$
- ② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$
- ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- ④ $(\sqrt{3}, 1)$
- ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \cdots \textcircled{1} \\ x - y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 $y = x - 1$ 로 변형하여
①에 대입하면
 $x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$
 $2x = 3$
 $\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$

21. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p, y=q$ 또는 $x=r, y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots \textcircled{A} \\ xy-y^2=6 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x=2y+1 \cdots \cdots \textcircled{C}$

②을 ②에 대입하여 정리하면

$$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$$

$$\therefore y=2, -3$$

$y=2, y=-3$ 을 ③에 대입하면

$$\text{각각 } x=5, x=-5$$

$$\therefore x=5, y=2 \text{ 또는 } x=-5, y=-3$$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} x-y=1 \cdots \textcircled{1} \\ x^2+y^2=5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$$

$$5=1^2+2xy$$

$$\therefore xy=2$$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\ (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y \\ \text{i) } x = y \\ x^2 + 2y^2 &= 3x^2 = 12 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow y = \pm 2 \\ \text{ii) } x = 2y \\ x^2 + 2y^2 &= 6y^2 = 12 \\ y = \pm \sqrt{2} &\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \\ x + y &= (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) \end{aligned}$$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

25. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

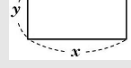
26. 가로, 세로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

27. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$$\therefore u = \pm 7, v = 12$$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

$$\text{또는} \begin{cases} x + y = -7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

(i) $\textcircled{\text{A}}$, $\textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = 3, y = 4$ 또는 $x = 4, y = 3$

(ii) $\textcircled{\text{A}}$, $\textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = -3, y = -4$ 또는 $x = -4, y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

28. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $-2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$
 $\alpha = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $1 + m + 2 - 4 = 0$
 $\therefore m = 1$
 $\therefore m + \alpha = 2$

29. 학교운동장에 길이가 70 m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 80 m^2 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로 길이와 세로 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10 m 이하이다.)

① 16 m ② 17 m ③ 18 m ④ 19 m ⑤ 20 m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$3x + 5y = 70$$

$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10$, $y = 8$

$$\therefore \text{가로} + \text{세로} = 18$$

30. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

31. 0이 아닌 실수 x, y 가 $(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$ 을 만족할 때, x 에 관한 이 방정식은 실수 a 에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. ($a \neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$ 에서
 $x^2y^2 + 4a^2x^2 + y^2 + 4a^2 - 8axy = 0$
 $(x^2y^2 - 4axy + 4a^2) + (y^2 - 4axy + 4a^2x^2) = 0$
 $(xy - 2a)^2 + (y - 2ax)^2 = 0$
 $xy - 2a, y - 2ax$ 는 실수이므로
 $xy - 2a = 0, y - 2ax = 0$
 $\therefore xy = 2a, y = 2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2 = 2a$
($a \neq 0$) 이므로 $x^2 = 1, x = \pm 1$

32. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$

이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$

이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{A}},$

$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{B}}$ 에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 $\textcircled{\text{A}}$ 에 대입하면 $x^2 = 1$

따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2, x = -1$ 일 때 $y = -2$

그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

33. 방정식 $2x + 5y = 84$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 의 해 중에서 x 의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots\text{㉠}$$

㉠에서 y 가 양의 정수이므로 $42 - x$ 가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$ 의 최댓값은 37

34. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점 짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

- ① 9
- ② 10
- ③ 11
- ④ 12
- ⑤ 13

해설

2점문항 개수를 x , 3점문항을 y ,
4점문항을 z 라 하자
 $2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots \textcircled{1}$
 $x + y + z = 30 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - 4 \times \textcircled{2} \Rightarrow y = 40 - 2x$
 $\textcircled{1} - 3 \times \textcircled{2} \Rightarrow z = x - 10$
 $\therefore x = 10$ 이면 $z = 0$
 $\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
 $\therefore x \geq 11$, 최소 11문항

35. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$ 라 하자. 이 때, a 가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = a$ 로 치환하면

$$x^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0$$

$\therefore a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A 의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

36. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 은 i 를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① $-i$

② i

③ $-2i$

④ $3i$

⑤ $1 + 2i$

해설

$x = i$ 를 방정식에 대입하면 $i^4 - 3i^3 + 2i^2 + ai + b = 0$
 $(a + 3)i + b - 1 = 0$ 에서 a, b 는 실수이므로 $a = -3, b = 1$
따라서, 주어진 방정식은 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$
한편, $x = i$ 에서 $x^2 + 1 = 0$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + kx + 1)$
우변을 전개해서 계수비교하면 $k = -3$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
따라서 나머지 세 근은 $-i$ 와 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이고
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 1이다.
 $\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i \times 1 = -i$

해설

4차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 네 근의 곱은 1
즉 ix (나머지 세 근의 곱)=1
 $\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i} = -i$

37. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z) = 10 \\ y(z+x) = 18 \\ z(x+y) = 24 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ 라 할 때,
 $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

- ① ± 2 ② ± 4 ③ ± 8 ④ ± 16 ⑤ ± 32

해설

$$\begin{cases} x(y+z) = 10 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ y(z+x) = 18 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ z(x+y) = 24 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} : 2(xy + yz + zx) = 52$
 $\therefore xy + yz + zx = 26$
 $\therefore xy = 2, yz = 16, zx = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉤}$
 $\textcircled{㉤}$ 에서 $(xyz)^2 = 16^2 \quad \therefore xyz = \pm 16$
 $\therefore x = \alpha = \pm 1, y = \beta = \pm 2, z = \gamma = \pm 8$ (복부호동순)
 $\therefore \alpha\beta\gamma = \pm 16$

38. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + 6 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?
- ① -1 ② 3 ③ -1, -3
- ④ 1, 3 ⑤ -3, 1

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로 $D/4 = (a + 2)^2 - 2a^2 - 6 \geq 0$ 에서 $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$
그런데 a 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $a = 1, 2, 3$
i) $a = 1$ 일 때 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 두 근은
 $x = 2, 4$ (조건을 만족)
ii) $a = 2$ 일 때 $x^2 - 8x + 14 = 0$ 의 두 근은
 $x = 4 \pm \sqrt{2}$ (조건에 위배)
iii) $a = 3$ 일 때 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 의 두 근은
 $x = 4, 6$ (조건을 만족)
i), ii), iii)에서 $a = 1, 3$

39. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여 xy 의 값이 아닌 것은?

① -15

② -7

③ -3

④ 5

⑤ 15

해설

$xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 에서 $(x - 2)(y + 4) = 3$

x, y 가 정수이므로

$(x - 2, y + 4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$

$\therefore (x, y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$

$\therefore xy = -3, -7, -15, 5$

40. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $x^2 + nx + 2n = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. α, β 가 정수일 때, n 은?

- ① 7, 8 ② 8, 9 ③ 9, 10 ④ 9 ⑤ 10

해설

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -n$, $\alpha\beta = 2n$ 이므로
 $\alpha\beta = -2(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 0$, $(\alpha + 2)(\beta + 2) = 4$
 α, β 가 정수이므로 $\alpha + 2, \beta + 2$ 도 정수
따라서

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 1 \\ \beta + 2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = 2 \\ \beta + 2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = -1 \\ \beta + 2 = -4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha + 2 = -2 \\ \beta + 2 = -2 \end{cases} \text{가 되어}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

각각의 경우, n 의 값은 $n = -(\alpha + \beta)$ 이므로
-1, 0, 9, 8의 값을 갖는다.