1. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5\cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

2. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2$ 또는 $x = 4$
, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

3. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30 ② 33 ③ 40
④ 42 ⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

4. 명제「$x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.
(역의 반례 : $x = -5$)

5. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \le 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가)조건이다.
- $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나)조건이다.

① 필요, 필요
② 필요, 충분
③ 충분, 충분
④ 충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \le 3\}$,
$Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면
$P \subset Q$, $\quad \therefore$ 충분조건
$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,
$S = \left\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\right\} = \{2\}$ 라고 하면
$R = S$, $\quad \therefore$ 필요충분조건

6. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b$, $q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5$, $q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0$, $q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz$, $q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

7. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

8. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$　② $R < Q < P$　③ $Q < P < R$
④ $Q < R < P$　⑤ $R < P < Q$

해설

ⅰ) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ⅱ) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

ⅲ) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

9. $x > 0, y > 0$일 때, $\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right) = 20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$

산술기하조건을 사용하면

$xy+\frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times 4 = 32$

10. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$
등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$
따라서 양의 실수 x는 1이다.
최솟값은 3이고, x값은 1이다.

11. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q '의 부정은?

p : $-1 < x \le 3$, q : $0 < x \le 2$

① $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \le x \le 3$

③ $-1 < x \le 3$

④ $0 < x \le 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

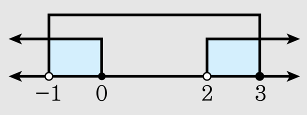
$\sim(\sim p$ 또는 $q)$ $\leftrightarrow$ p 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q$: $x \le 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3)$ 이고 $(x \le 0$ 또는 $x > 2)$

$\leftrightarrow$ $(-1 < x \le 3$ 이고 $x \le 0)$ 또는 $(-1 < x \le 3$ 이고 $x > 2)$

$\leftrightarrow$ $-1 < x \le 0$ 또는 $2 < x \le 3$



12. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow\ xy = 0$ (참)

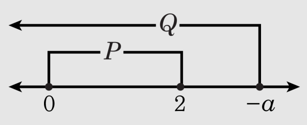
13. 실수 x에 대한 두 조건 $p\ :\ 0 \le x \le 2$, $q\ :\ x+a \le 0$이 있다. 명제 $p \ \rightarrow\ q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$p,\ q$를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $p\ \rightarrow\ q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a,\ a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

14. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2-ax+2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.
$x-2=0 \Rightarrow x^2-ax+2=0 \therefore a=3$

15. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

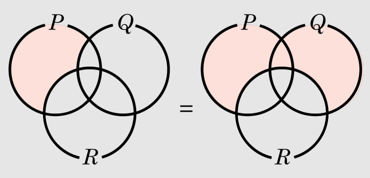
코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$
$\therefore\ M=10,\ m=-10$
$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

16. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p\to q$　② $r\to q$　③ $q\to p$
④ $p\to r$　⑤ $q\to r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R\leftrightarrow Q\subset R$ $\therefore$ $q\to r$가 참이다.

17. x, y가 실수이고 A, B, C를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q이기 위한 필요충분조건은?

① $p : x+y \geq 2$, $q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : |x|+|y| = 0$, $q : 3\sqrt{x}+3\sqrt{y} = 0$

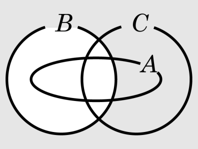
③ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p : A \subset B \subset C$, $q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p : x+y$ 가 유리수이다. $q : x$, y 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2$ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x = 3$, $y = -3$)
② $|x|+|y| = 0 \;\Rightarrow\; {}^3\sqrt{x}+{}^3\sqrt{y} = 0$
여기서 $|x|+|y| = 0$ 은 $x = 0$, $y = 0$ 과 같으므로
$x = 0,\ y = 0 \rightarrow {}^3\sqrt{x}+{}^3\sqrt{y} = 0$ (충분조건)
(반례 : $x = 8$, $y = -8$)
③ $xy+1 > x+y > 2 \;\Leftrightarrow\; x > 1$ 이고 $y > 1$
④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow$ x, y 모두 유리수이다.
(필요조건) (반례 : $x = 1+\sqrt{2}$, $y = 1-\sqrt{2}$)

18. 세 조건 $p : x \le -2$ 또는 $1 \le x \le 5$, $q : x \le a$, $r : x \le b$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, p는 r이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① a의 최댓값은 -2이고, b의 최솟값은 5이다.

② a의 최솟값은 -2 이고, b의 최댓값은 5이다.

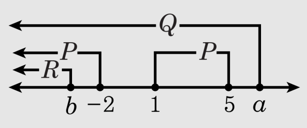
③ a의 최댓값은 5이고, b의 최솟값 -2이다.

④ a의 최솟값은 5이고, b의 최댓값은 -2이다.

⑤ a, b의 최댓값, 최솟값은 존재하지 않는다.

해설

$p \to q, P \subset Q$
$r \to p, R \subset P$



$\therefore b \le -2$ 그리고 $a \ge 5$
a의 최솟값은 5이고 b의 최댓값은 -2이다.

19. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q \quad s \to \sim r \quad q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

20. 네 개의 명제 p, q, r, s가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

㉠ $p \Rightarrow q$	㉡ $\sim r$ 그리고 $p \Rightarrow \sim q$
㉢ $\sim s \Rightarrow p$ 그리고 $\sim r$	㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s$

① p　② p, q　③ q, r
④ p, q, r　⑤ p, q, r, s

해설

㉡ $\sim r$ 그리고 $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow r$ 또는 $\sim p$
㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$
㉢, ㉣에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p 는 참이다. ㉠에서 p 가 참이면 q가 참이고 ㉡에서 q 가 참이면 r도 참이다. ($\because \sim p$ 는 거짓) ㉢에서 대우가 참이므로 s도 참이다.
$\therefore$ p, q, r, s 모두 참이다.