

1. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$$(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5 \text{ 이므로}$$

$$x + 2y \text{의 최댓값 } M = 5, \text{ 최솟값 } m = -5$$

$$\therefore M + n = 5 + (-5) = 0$$

2. 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 조건 ' $x^2 - 6x + 8 = 0$ ' 의 진리집합은 $\{2, 3\}$ 이다.
- ② 조건 ' x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1, 3, 5\}$ 이다.
- ③ 조건 ' x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0, 1, 2, 4\}$ 이다.
- ④ 조건 ' $0 \leq x < 4$ 이고 $x \neq 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$ 이다.
- ⑤ 조건 ' x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1, 2, 3\}$ 이다.

해설

- ① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$
 , 따라서, 진리집합은 $\{2, 4\}$
- ② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2, 3, 5\}$
- ③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 4\}$
- ④ $x = 0, 1, 2, 3$ 이고 $x \neq 2$ 이므로 진리집합은 $\{0, 1, 3\}$
- ⑤ 전체집합이 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1, 2, 3, 6\}$

3. 다음 중에서 명제 ‘자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.’가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30

② 33

③ 40

④ 42

⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

4. 명제「 $x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.

(역의 반례 : $x = -5$)

5. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \leq 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\},$$

$$Q = \{x \mid x > -2\} \text{ 라고 하면}$$

$$P \subset Q, \quad \therefore \text{충분조건}$$

$$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\},$$

$$S = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\} \text{ 라고 하면}$$

$$R = S, \quad \therefore \text{필요충분조건}$$

6. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (a, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.

③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

7. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

8. $0 < a < 1$ 일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$

② $R < Q < P$

③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$

⑤ $R < P < Q$

해설

$$\text{i) } \frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

이 때 $a > 0$, $2-a > 0$, $1-a > 0$ 이므로

$$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$$

즉, $P > Q$

$$\text{ii) } \frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$$

이 때 $a > 0$, $2+a > 0$, $a-2 < 0$, $a+1 > 0$ 이므로

$$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$$

즉, $P > R$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} &= \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)} \\ &= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)} \end{aligned}$$

이 때 $2-a > 0$, $2+a > 0$, $a^2-a+2 > 0$ 이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$ 이다.

9. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right) \left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right) \left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3 \left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2 \sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

10. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

11. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은?

$$p : -1 < x \leq 3, \quad q : 0 < x \leq 2$$

① $-1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \leq x \leq 3$

③ $-1 < x \leq 3$

④ $0 < x \leq 2$

⑤ x 는 모든 실수

해설

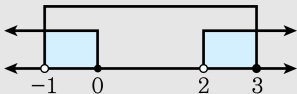
$\sim(\sim p \text{ 또는 } q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데

$\sim q : x \leq 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$

$\leftrightarrow (-1 < x \leq 3)$ 이고 $(x \leq 0 \text{ 또는 } x > 2)$

$\leftrightarrow (-1 < x \leq 3 \text{ 이고 } x \leq 0) \text{ 또는 } (-1 < x \leq 3 \text{ 이고 } x > 2)$

$\leftrightarrow -1 < x \leq 0 \text{ 또는 } 2 < x \leq 3$



12. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
' $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

대우 : $x = 0, y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

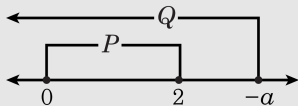
13. 실수 x 에 대한 두 조건 $p : 0 \leq x \leq 2$, $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x | x \leq -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$ 하려면 $2 \leq -a$, $a \leq -2$ 따라서 a 의 최댓값은 -2

14. 두 조건 $p : x - 2 \neq 0$, $q : x^2 - ax + 2 \neq 0$ 에서 $q \rightarrow p$ 가 참일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$ 가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - ax + 2 = 0 \therefore a = 3$$

15. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ 이므로 } 100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

$$\therefore M = 10, m = -10$$

$$\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$$

16. 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라고 하자. $P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p \rightarrow q$

② $r \rightarrow q$

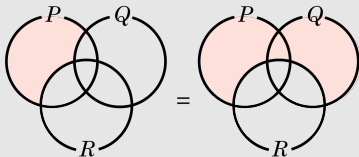
③ $q \rightarrow p$

④ $p \rightarrow r$

⑤ $q \rightarrow r$

해설

$P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q \cup R = R \leftrightarrow Q \subset R \therefore q \rightarrow r$ 가 참이다.

17. x, y 가 실수이고 A, B, C 를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건은?

① $p: x+y \geq 2, q: x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p: |x| + |y| = 0, q: 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$

③ $p: xy + 1 > x + y > 2, q: x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p: A \subset B \subset C, q: A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p: x+y$ 가 유리수이다. $q: x, y$ 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2 \quad x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례: $x = 3, y = -3$)

② $|x| + |y| = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$

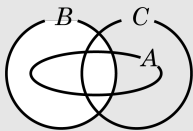
여기서 $|x| + |y| = 0$ 은 $x = 0, y = 0$ 과 같으므로

$x = 0, y = 0 \rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$ (충분조건)

(반례: $x = 8, y = -8$)

③ $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x, y$ 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례: $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$)

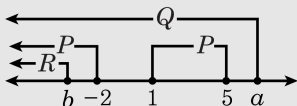
18. 세 조건 $p: x \leq -2$ 또는 $1 \leq x \leq 5$, $q: x \leq a$, $r: x \leq b$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, p 는 r 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① a 의 최댓값은 -2 이고, b 의 최솟값은 5 이다.
- ② a 의 최솟값은 -2 이고, b 의 최댓값은 5 이다.
- ③ a 의 최댓값은 5 이고, b 의 최솟값은 -2 이다.
- ④ a 의 최솟값은 5 이고, b 의 최댓값은 -2 이다.
- ⑤ a, b 의 최댓값, 최솟값은 존재하지 않는다.

해설

$$p \rightarrow q, P \subset Q$$

$$r \rightarrow p, R \subset P$$



$$\therefore b \leq -2 \text{ 그리고 } a \geq 5$$

a 의 최솟값은 5 이고 b 의 최댓값은 -2 이다.

19. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건, s 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \rightarrow q$

② $q \rightarrow \sim p$

③ $s \rightarrow \sim q$

④ $\sim s \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim r \rightarrow p$

해설

$$p \rightarrow q \quad s \rightarrow \sim r \quad q \rightarrow r$$

$$q \rightarrow r \text{의 대우} : \sim r \rightarrow \sim q$$

$$\therefore s \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow \sim q \text{ 이므로 } s \rightarrow \sim q$$

20. 네 개의 명제 p, q, r, s 가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

㉠ $p \Rightarrow q$

㉡ $\sim r$ 그리고 $p \Rightarrow \sim q$

㉢ $\sim s \Rightarrow p$ 그리고 $\sim r$

㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s$

① p

② p, q

③ q, r

④ p, q, r

⑤ p, q, r, s

해설

㉡ $\sim r$ 그리고 $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow r$ 또는 $\sim p$

㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$

㉢, ㉣에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p 는 참이다. ㉠에서 p 가 참이면 q 가 참이고 ㉡에서 q 가 참이면 r 도 참이다. ($\because \sim p$ 는 거짓) ㉣에서 대우가 참이므로 s 도 참이다.

$\therefore p, q, r, s$ 모두 참이다.