

1. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

해설

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
 a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열
 $\therefore a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
 $= 4 + 3n - 3$
 $= 3n + 1$
 $\therefore a_{10} = 31$

2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

3. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

4. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값은?

- ① 1022 ② 1024 ③ 2021 ④ 2046 ⑤ 2082

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 2$ 에서 $a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$

이때, $a_n + 2 = b_n$ 이라 하면

$b_{n+1} = 2b_n$, $b_1 = a_1 + 2 = 4$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

따라서 $a_n = b_n - 2 = 2^{n+1} - 2$ 이므로

$a_{10} = 2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046$

5. $a_1 = 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이 성립할 때, 제 5항은?

① 678

② 708

③ 738

④ 768

⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이고 $a_{n+1} = 3S_n$ 이므로

$$S_{n+1} - S_n = 3S_n$$

$$\therefore S_{n+1} = 4S_n$$

이때, $a_1 = S_1 = 4$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

$$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$$

$$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$$

6. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

7. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1) \cdot 2^n$
 $= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots \textcircled{1}$
 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변)= (우변)=2
 (ii) $n = k$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot 2^k$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 곱하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$
 $= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$
 따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.
 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$ 라 할

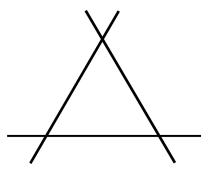
때, $\frac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{1024}$ ② $\frac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$
 (ii) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하고, $n = k+1$ 을 대입하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2k-1) \cdot 2^k$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$ 을 곱하면
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \boxed{2(2k+1)}$
 $= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$
 $= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$
 따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.
 (i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.
 즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$
 $\therefore \frac{g(k)}{f(k)} = 2^k$
 $\therefore \frac{g(10)}{f(10)} = 1024$

8. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n 개의 직선이 있다. n 개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n 이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$ 을 나타낸다. a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $a_{n+1} = a_n + n + 1$

해설

n 개의 직선이 있는 상황에서 직선 하나가 늘어날 때 추가되는 평면의 개수를 구한다.

3개의 직선이 있는 상태에서 직선이 하나 추가되면 새로운 직선이 3개의 직선과 각각 만나 오른쪽 그림과 같이 4개의 평면이 새로 생긴다. 같은 방법으로 n 개의 직선이 있는 상태에서 직선 하나를 추가하면 추가된 직선은 기존의 n 개의 직선과 모두 만나 새로운 평면 $n + 1$ 개를 만드므로 $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$ 이 성립한다.

