1. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로

a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 4 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 4 + 3n - 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

$\therefore a_{10} = 31$

2. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 115　　② 270　　③ 326　　④ 445　　⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

3. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ = 2^{n-2}$$

4. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$일 때, a_{10}의 값은?

① 1022 ② 1024 ③ 2021 ④ 2046 ⑤ 2082

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 2$에서 $a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$

이때, $a_n + 2 = b_n$이라 하면

$b_{n+1} = 2b_n, \; b_1 = a_1 + 2 = 4$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

따라서 $a_n = b_n - 2 = 2^{n+1} - 2$이므로

$a_{10} = 2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046$

5. $a_1 = 4$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이 성립할 때, 제 5항은?

① 678 ② 708 ③ 738 ④ 768 ⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이고 $a_{n+1} = 3S_n$이므로

$S_{n+1} - S_n = 3S_n$

$\therefore S_{n+1} = 4S_n$

이때, $a_1 = S_1 = 4$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$

$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$

6. $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{3}{7},\ \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \frac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$은 등차수열을 이룬다. 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항 $\frac{1}{a_n}$은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1)\cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50}$에서 $n \geq 25.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.

7. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, (좌변)= (우변)=2

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(\text{가})}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(\text{나})}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(\text{가})}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n=1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$을 대입하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

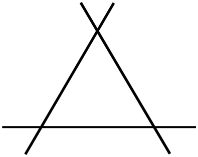
(i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$

$\therefore \dfrac{g(k)}{f(k)} = 2^k$

$\therefore \dfrac{g(10)}{f(10)} = 1024$

8. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n개의 직선이 있다. n개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$을 나타낸다. a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

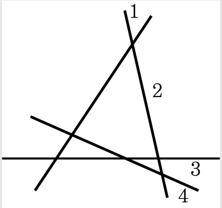


▶ 답 :

▷ 정답 : $a_{n+1} = a_n + n + 1$

해설

n개의 직선이 있는 상황에서 직선 하나가 늘어날 때 추가되는 평면의 개수를 구한다.



3개의 직선이 있는 상태에서 직선이 하나 추가되면 새로운 직선이 3개의 직선과 각각 만나 오른쪽 그림과 같이 4개의 평면이 새로 생긴다. 같은 방법으로 n개의 직선이 있는 상태에서 직선 하나를 추가하면 추가된 직선은 기존의 n개의 직선과 모두 만나 새로운 평면 $n + 1$개를 만드므로 $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$이 성립한다.