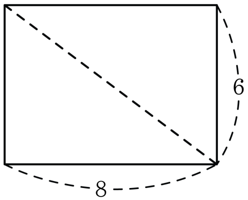
1. 다음 그림에서 직사각형의 대각선의 길이를 구하여라.



▶ **답 :**

▷ **정답 :** 10

해설

피타고라스 정리에 따라
$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ 이다.

2. 가로와 세로의 길이의 비가 $5:2$ 이고 대각선의 길이가 $2\sqrt{29}$ 인 직사각형의 둘레의 길이는?

① 28　② 20　③ 18　④ $10\sqrt{2}$　⑤ $14\sqrt{2}$

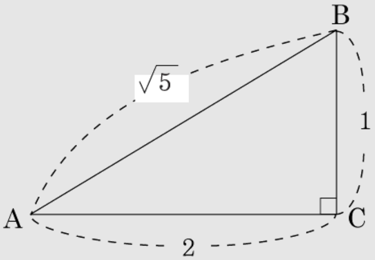
해설

가로의 길이를 $5x$, 세로의 길이를 $2x$ 라고 하면,
직사각형의 대각선의 길이
$2\sqrt{29} = \sqrt{(5x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{29}x$ 가 되어 $x = 2$ 이다.
따라서 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 10, 4 이므로
직사각형의 둘레의 길이는 $2 \times 10 + 2 \times 4 = 28$ 이다.

3. $\tan A = 0.5$ 일 때, $\sin A + \cos A$ 의 값은?(단, $0° < A < 90°$)

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설



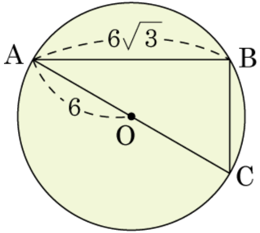
$\tan A = 0.5 = \frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이다

$\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 $\sin A + \cos A = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 이다.

4. 반지름의 길이가 6 인 원에 내접하는 다음 그림과 같은 삼각형 ABC 에서 $\sin A$ 의 값이 $\frac{a}{b}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소)



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

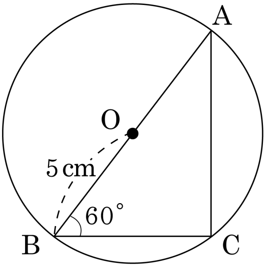
$\angle B$ 는 지름의 원주각 $\angle B = 90°$

$\overline{BC} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6$

$\therefore \sin A = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 이므로

$a+b=3$ 이다.

5. 다음 그림에서 $\overline{BO} = 5\,\text{cm}$, $\angle B = 60^\circ$ 일 때, 직각삼각형 ABC 의 둘레의 길이는?



① $5(3+\sqrt{3})\,\text{cm}$

② $5(3-\sqrt{3})\,\text{cm}$

③ $5(3+\sqrt{2})\,\text{cm}$

④ $5(2\sqrt{3}-1)\,\text{cm}$

⑤ $5(3+2\sqrt{3})\,\text{cm}$

해설

반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이므로 $\angle ACB = 90^\circ$

$\overline{AB} = 10\,\text{cm}$

$\overline{AC} = \sin 60^\circ \times 10 = 5\sqrt{3}(\,\text{cm})$

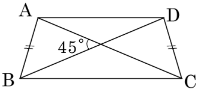
$\overline{BC} = \cos 60^\circ \times 10 = 5(\,\text{cm})$

$\therefore$ (직각삼각형 ABC 의 둘레의 길이)

$= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 10 + 5\sqrt{3} + 5$

$= 5\sqrt{3} + 15 = 5(\sqrt{3} + 3)\,\text{cm}$

6. 다음 그림과 같이 두 대각선이 이루는 각의 크기가 $45°$ 인 등변사다리꼴 ABCD 의 넓이가 $36\sqrt{2}\text{cm}^2$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이를 구하면?



① 8 cm ② 10 cm ③ 12 cm ④ 14 cm ⑤ 16 cm

해설

대각선 $\overline{AC} = \overline{BD} = x$ 라면

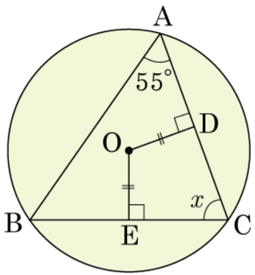
$$x \times x \times \frac{1}{2} \times \sin 45 = 36\sqrt{2}$$

$$x^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12 \ (\text{cm})$$

7. 다음 그림의 원 O 에서 $\angle CAB = 55°$ 일 때, $\angle ACB$ 의 크기는?



① $50°$　② $55°$　③ $60°$　④ $65°$　⑤ $70°$

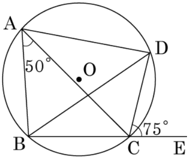
해설

중심에서 현에 내린 수선의 길이가 같으므로

$\overline{AC} = \overline{BC}$, 따라서 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형

$\therefore x = 180° - 55° \times 2 = 70°$

8. 다음 그림에서 □ABCD 는 원 O 에 내접하고, $\angle BAC = 50°$, $\angle DCE = 75°$ 일 때, $\angle DBC$ 의 크기는?



① 25°　② 30°　③ 35°　④ 40°　⑤ 45°

해설

$\angle DCE = \angle BAD = 75°$

$\angle DAC = \angle DBC$ 이므로 $\angle DBC = 75° - 50° = 25°$

9. 변량 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 의 평균이 10, 분산이 5 일 때, 변량 $4x_1+1, 4x_2+1, 4x_3+1, \cdots 4x_n+1$ 의 평균, 분산을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

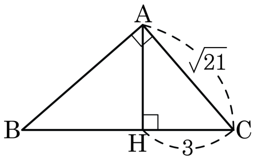
▷ 정답 : 평균 : 41

▷ 정답 : 분산 : 80

해설

(평균)$= 4 \cdot 10 + 1 = 41$
(분산)$= 4^2 \cdot 5 = 80$

10. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



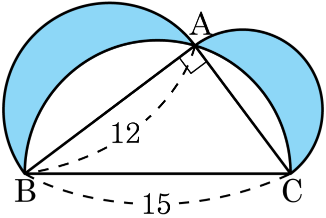
▶ 답 :

▷ 정답 : $7\sqrt{3}$

해설

$\triangle ACH$ 와 $\triangle ABC$ 는 $\angle C$ 를 공통각으로 가지고 있으며 한 개씩의 직각을 가지고 있다.
따라서 두 삼각형은 닮은 꼴이므로
$\overline{AC} : \overline{CH} = \overline{BC} : \overline{AC}$ 에서
$\overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$ 이므로 $21 = 3 \times \overline{CB}$, 즉 $\overline{CB} = 7$
$\triangle ABC$ 에서 피타고라스 정리를 적용하면 $49 = 21 + \overline{AB}^2$
$\overline{AB} = 2\sqrt{7}$ 이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times \sqrt{21} = 7\sqrt{3}$

11. 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이는?



① 27 ② 54 ③ 81 ④ 100 ⑤ 108

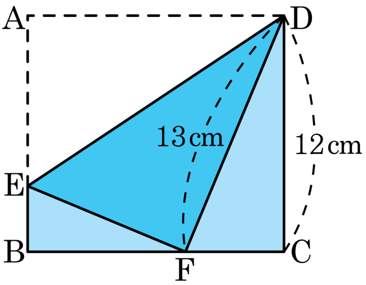
해설

색칠한 부분의 넓이는 큰 반원 안 직각삼각형의 넓이와 같다.

직각삼각형의 나머지 한 변이 9 이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}\times12\times9=54$

따라서 넓이는 54이다.

12. 직사각형을 접어 다음의 그림과 같은 모양을 만들었다. 이 때 $\overline{FD} = 13\text{cm}$, $\overline{CD} = 12\text{cm}$ 일 때, $\triangle DEF$ 의 넓이는?



① $\dfrac{160}{3}\text{cm}^2$ ② $\dfrac{145}{7}\text{cm}^2$ ③ $\dfrac{169}{3}\text{cm}^2$
④ $\dfrac{178}{7}\text{cm}^2$ ⑤ $\dfrac{170}{3}\text{cm}^2$

해설

$(\overline{FD})^2 = (\overline{FC})^2 + (\overline{CD})^2$, $\overline{FC} = 5\text{cm}$.
$\overline{AE} = \overline{EF} = x$, $\overline{BF} = 13 - 5 = 8\text{cm}$, $\overline{EB} = (12 - x)\text{cm}$.
$x^2 = (12 - x)^2 + 8^2$, $x = \dfrac{26}{3}\text{cm}$.
$\overline{EF} = \dfrac{26}{3}\text{cm}$ 이므로 $\triangle DEF = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{26}{3} \times 13 = \dfrac{169}{3}(\text{cm}^2)$.

13. 이차함수 $y=-x^2+8x-16$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 축과 만나는 점을 B 라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

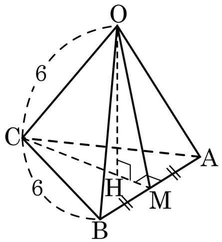
▷ 정답 : $4\sqrt{17}$

해설

$y=-x^2+8x-16$
$y=-(x-4)^2$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이고, y 축과 만나는 점은 x 의 좌표가 0 이므로 $(0,\ -16)$ 이다.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(4-0)^2+\{0-(-16)\}^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

14. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 8 인 정삼각형으로 이루어진 정사면체가 있다. 점 O 에서 밑면에 내린 수선의 발을 H, 선분 AB 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{CH}$, $\overline{OH}$ 의 길이를 차례로 구하면?
(단, H 는 밑면 ABC 의 무게중심이다.)



① 3, $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$　② 3, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$

③ 3, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{6}$　④ 3, $3\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$

⑤ 3, $3\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $3\sqrt{6}$

해설

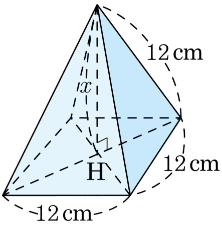
(1) $\overline{BM} = 3$

(2) $\overline{CM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

(3) $\overline{CH} = 3\sqrt{3} \times \dfrac{2}{3} = 2\sqrt{3}$

(4) $\overline{OH} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

15. 다음 그림과 같은 정사각뿔의 높이 x 의 길이는 ?



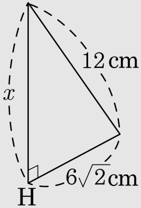
① $5\sqrt{2}$ cm　② $6\sqrt{2}$ cm　③ $7\sqrt{2}$ cm

④ $8\sqrt{2}$ cm　⑤ $9\sqrt{2}$ cm

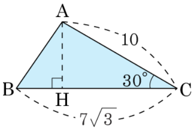
해설

면의 대각선의 길이는 $12\sqrt{2}$ cm 이므로

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{12^2 - (6\sqrt{2})^2} \\
&= \sqrt{144 - 72} = \sqrt{72} \\
&= 6\sqrt{2}(\text{ cm})
\end{aligned}
$$



16. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\triangle ABH$ 둘레의 길이는?



① $5-2\sqrt{3}+\sqrt{37}$

② $5+2\sqrt{3}+\sqrt{37}$

③ $5+2\sqrt{3}-\sqrt{37}$

④ $5+3\sqrt{2}+\sqrt{37}$

⑤ $6+2\sqrt{3}+\sqrt{37}$

해설

$\overline{AH}=10\sin 30°=5$

$\overline{BH}=7\sqrt{3}-\overline{CH}=7\sqrt{3}-10\cos 30°=2\sqrt{3}$

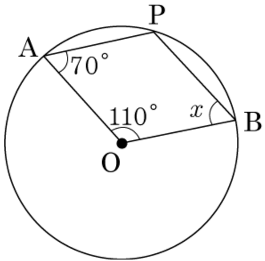
$\overline{AB}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{37}$

따라서 $\triangle ABH$ 둘레의 길이는 $5+2\sqrt{3}+\sqrt{37}$ 이다.

17. 다음 그림에서 $\angle x$ 의 크기는?

① $55°$ ② $65°$ ③ $75°$

④ $85°$ ⑤ $115°$



해설

5.0pt$\overset{\frown}{AB}$ 에 대한 중심각 : $360° - 110° = 250°$

$\angle APB = 250° \times \dfrac{1}{2} = 125°$

□OAPB 에서

$\angle PBO = 360° - 70° - 125° - 110° = 55°$ 이다.

18. 세 수 a, b, c 의 평균이 8 이고 분산이 3 일 때, 세 수 a^2, b^2, c^2 의 평균을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

해설

세 수 a, b, c 의 평균이 8 이므로

$$\frac{a+b+c}{3} = 8$$

$\therefore a+b+c = 24 \cdots$ ㉠

또, a, b, c 의 분산이 3 이므로

$$\frac{(a-8)^2+(b-8)^2+(c-8)^2}{3} = 3$$

$(a-8)^2+(b-8)^2+(c-8)^2 = 9$

$\therefore a^2+b^2+c^2-16(a+b+c)+192 = 9$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$a^2+b^2+c^2-16(24)+192 = 9$

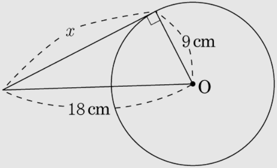
$a^2+b^2+c^2 = 201$

따라서 a^2, b^2, c^2 의 평균은 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} = \dfrac{201}{3} = 67$ 이다.

19. 반지름의 길이가 9cm 인 원의 중심으로부터 18cm 떨어진 점에서 그 원에 그은 접선의 길이는?

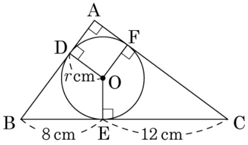
① $9\sqrt{3}$cm　② $10\sqrt{3}$cm　③ $11\sqrt{3}$cm
④ $12\sqrt{3}$cm　⑤ $13\sqrt{3}$cm

해설



$$x = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{9^2(4-1)} = 9\sqrt{3}(\text{cm})$$

20. 다음 그림에서 원 O 는 $\angle A = 90°$ 인 $\triangle ABC$ 의 내접원이고 점 D, E, F 는 접점이다. $\overline{BE} = 8\text{cm}$, $\overline{CE} = 12\text{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이를 구하여라.



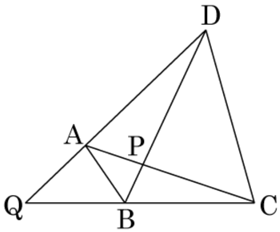
▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad \text{cm}^2}$

▷ 정답 : 16π $\underline{\text{cm}^2}$

해설

$\overline{BD} = 8\text{cm}$, $\overline{CF} = 12\text{cm}$ 이므로
$\overline{AB} = (8 + r)\text{cm}$, $\overline{AC} = (12 + r)\text{cm}$ 이다.
$(8 + r)^2 + (12 + r)^2 = 20^2$
$2r^2 + 40r - 192 = 0$
$r^2 + 20r - 96 = 0$
$(r - 4)(r + 24) = 0$
따라서 $r = 4\,\text{cm}$ $(r > 0)$ 이므로
원 O 의 넓이는 $4^2\pi = 16\pi(\text{cm}^2)$ 이다.

21. 다음 조건을 만족할 때, □ABCD가 원에 내접하지 <u>않는</u> 것은?



① $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

② $\overline{QA} \times \overline{QD} = \overline{QB} \times \overline{QC}$

③ $\angle BAC = \angle BDC$

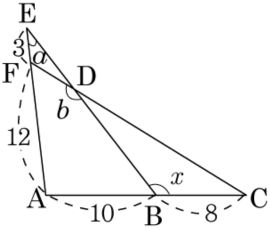
④ $\angle ABQ = \angle ADC$

⑤ $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

해설

□ABCD 가 원에 내접하려면
$\overline{PA} \times \overline{PC} = \overline{PB} \times \overline{PD}$ 이어야 한다.

22. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{EF}}=3$, $\overline{\mathrm{AF}}=12$, $\overline{\mathrm{AB}}=10$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$이다. $\angle\mathrm{DEF}=a$, $\angle\mathrm{FDB}=b$일 때, $\angle x$ 의 크기를 a, b 에 관한 식으로 나타내어라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\angle x=b-a$

해설

$12\times(12+3)=180$

$10\times(10+8)=180$

$\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$ 이므로 네 점 B, C, E, F 는 한 원 위에 있다.

$\therefore\ \angle\mathrm{DCB}=\angle\mathrm{FED}=a$

$\triangle\mathrm{DBC}$ 에서 $b=\angle x+a$

$\therefore\ \angle x=b-a$

23. 자연수 a, b, c에 대하여 a, c는 10보다 작은 홀수이고, b는 10보다 작은 짝수이다. 이차방정식 $ax^2-3bx+6c=0$ 의 두 근 p, q 가 $3 \le p < 6 < q \le 9$ 를 만족할 때, p^2+q^2 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 84

▷ 정답 : 60

해설

$ax^2-3bx+6c=0$ 에서 $p+q=\dfrac{3b}{a}$, $pq=\dfrac{6c}{a}$

한편 $3 \le p < 6 < q \le 9$ 에서

$9 < p+q < 15$, $9 < \dfrac{3b}{a} < 15$

$\therefore\ 3 < \dfrac{b}{a} < 5$

$a > 0$ 이므로 $3a < b < 5a$

a 는 10 보다 작은 자연수 중 홀수이므로

$a=1$, $b=4$

따라서 $pq=6c$ 이다.

$18 < pq < 54$ 이므로 $18 < 6c < 54$, $3 < c < 9$

c 는 10 보다 작은 홀수인 자연수이므로 $c=5$, 7

따라서 이차방정식은 $x^2-12x+30=0$, $x^2-12x+42=0$ 이다.

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ p^2+q^2 &= 12^2-2\times30=84\\ &= 12^2-2\times42=60\end{aligned}$$

24. 정사면체 O – ABC 에서 모서리 AB 의 중점을 M , $\angle \mathrm{OMC} = \alpha$ 라 할 때, $\cos\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{3}$

해설

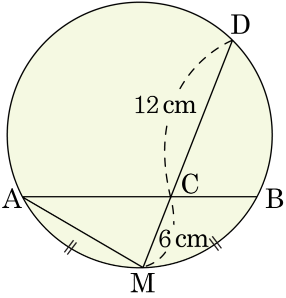
정사면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면 $\overline{\mathrm{OM}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

또 꼭짓점 O 에서 밑면에 내린 수선의 발을 H 라 하면 H 는 밑면의 무게중심이므로

$$\overline{\mathrm{MH}} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

따라서 $\cos\alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \dfrac{1}{3}$ 이다.

25. 다음 그림에서 $5.0\mathrm{pt}\overset{\frown}{\mathrm{AM}} = 5.0\mathrm{pt}\overset{\frown}{\mathrm{BM}}$ 이고, $\overline{\mathrm{MC}} = 6\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{CD}} = 12\,\mathrm{cm}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AM}}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$
② $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$
③ $7\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$
④ $7\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$
⑤ $8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$

해설

$5.0\mathrm{pt}\overset{\frown}{\mathrm{AM}} = 5.0\mathrm{pt}\overset{\frown}{\mathrm{BM}}$ 이므로 $\angle\mathrm{ADM} = \angle\mathrm{BAM}$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AM}}$ 은 $\triangle\mathrm{ACD}$ 의 외접원의 접선

$\overline{\mathrm{AM}}^2 = \overline{\mathrm{CM}} \times \overline{\mathrm{DM}} = 6 \times (6+12) = 108$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AM}} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$