1. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$

$\therefore\ k = 9$

2. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$
$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$
$-2k+2<0,\ k>1$
$\therefore\ m=1$

3. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\dfrac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

4. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면
$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$
$\therefore a = 1, \ b = -2$
$\therefore a - b = 3$

5. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a = 2, b' = -2, c = 3$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

6. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0,\ c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0,\ c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a,b,c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

7. $x^2+2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}x+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}>0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

8. a가 실수일 때, $f(x)=x^2+2(a+1)x+a^2$, $g(x)=x^2+2ax+(a-1)^2$에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x)=0, g(x)=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$도 실근을 가진다.

② $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$은 허근을 가진다.

③ $f(x)=0$이 허근을 가지면 $g(x)=0$도 허근을 가진다.

④ $g(x)=0$이 실근을 가지면 $f(x)=0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1,$

$\frac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1>2a-1,$

즉, $D_1>D_2$이므로 $D_1<0$이면 $D_2<0$

9. x에 대한 다음 방정식의 두 근의 곱은?

$$2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$$

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(2x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1) = 0$

$\therefore\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

10. 이차방정식 $x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 12

해설

$x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha + \beta = 7$, $\alpha\beta = 1$
$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 7 + 2 = 9$
따라서 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$

11. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

두 근을 $n,\ n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots\cdots ㉠ \\ n(n+1) = a + 1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n = \dfrac{a-1}{2}$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2} + 1\right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$a = -1,\ 5$

$\therefore -1 + 5 = 4$

12. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$이므로

$\alpha + \alpha + 2 = \dfrac{2k}{9}$ ……㉠

$\alpha(\alpha + 2) = \dfrac{k - 5}{9}$ ……㉡

㉠에서 $\alpha = \dfrac{k}{9} - 1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2 - 9k - 36 = 0$, $(k - 12)(k + 3) = 0$

$\therefore\ k = 12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$\dfrac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{|9|} = 2$에서

$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2 - 9k - 36 = 0\ \therefore\ k = 12,\ -3$

13. x에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$의 한근이 $1 + \sqrt{5}$일 때, a의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

다른 한 근을 α라 하면
두 근의 곱은 $(1 + \sqrt{5})\alpha = 4$
따라서 $\alpha = -1 + \sqrt{5}$
$\therefore$두 근의 합은 $(1 + \sqrt{5}) + (-1 + \sqrt{5}) = a$
$\therefore a = 2\sqrt{5}$

14. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$의 두 근의 비가 $3 : 4$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = 2$

해설

두 근을 3α, 4α라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$3\alpha + 4\alpha = 14k \cdots\cdots$㉠
$3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \cdots\cdots$㉡
㉠에서 $7\alpha = 14k \quad \therefore \alpha = 2k \cdots\cdots$㉢
㉡에서 $12\alpha^2 = 96k \quad \therefore \alpha^2 = 8k \cdots\cdots$㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $4k^2 = 8k$, $4k(k-2) = 0$
$\therefore k = 0$또는 $k = 2$
따라서 양수 k의 값은 $k = 2$이다.

15. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q + 2 = 0$의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 다음 중 알맞은 q의 값으로 가장 작은 것은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + 2\alpha = 3p \cdots\cdots ㉠$
$\alpha \cdot 3\alpha = 4q + 2 \cdots\cdots ㉡$
㉠에서 $\alpha = p$이것을 ㉡에 대입하면
$2p^2 = 4q + 2 \quad \therefore p^2 = 2q + 1 \cdots\cdots ㉢$
한편, p, q(실수)에서 주어진 방정식은
서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D = (-3p)^2 - 4(4q + 2) > 0$
$\therefore\ 9p^2 - 16q - 8 > 0$
위 식을 ㉢에 대입하면 $(18q + 9) - 16p - 8 > 0$
$2q + 1 > 0 \quad \therefore q > -\frac{1}{2}$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근을 $\alpha+1$, $\beta+1$이라 한다. 이 때, 상수 a, b의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b\cdots\cdots$㉠

또, $x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$

즉, $\alpha+\beta+2=b,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=a\cdots\cdots$㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a+2=b,\ b-a+1=a$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore ab=1$

17. 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 a, b라 할 때, a^2+b^2 와 ab를 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-8x+12=0$　② $x^2-7x+12=0$

③ $x^2+7x+12=0$　④ $x^2+5x+4=0$

⑤ $x^2-5x+4=0$

해설

$x^2-3x+4=0$의 두 근이 a, b라면

$a+b=3,\ ab=4$

$$\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-8=1 \\ ab=4 \end{cases}$$

1, 4를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-5x+4=0$

18. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$를 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2+6x+4=0$ ② $x^2+6x-4=0$

③ $x^2+4=0$ ④ $x^2-6x+4=0$

⑤ $x^2-6x-4=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해서

두 근 α, β에 대해 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

두 근을 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$로 하는

방정식에서

두 근의 합 $\Rightarrow \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=(-3)+\frac{-3}{1}=-6$

두 근의 곱 $\Rightarrow \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=4$

$\therefore\ x^2-(-6)x+4=x^2+6x+4=0$

19. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면
$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$

$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0, \left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$

$\alpha+\beta=12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ 의 합은

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

20. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2 , 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 조건에서
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$
$f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$
$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$
따라서 $f(2x+1)=0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
이때 두 근의 합 $\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}$
$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{2-2}{2}=0$

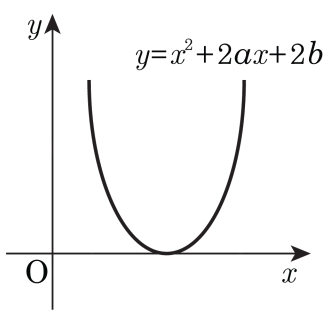
21. 이차방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은?
(단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b + \sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b - \sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b = -4,\ b^2 + 2 = a$
$\therefore\ \ a = 6,\ b = -2,\ ab = -12$

22. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

23. 방정식 $\{1+(a+b)^2\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\{1+(a+b)^2\}\cdot 2\geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab$

$=-1$

24. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면
$x^2+5yx+ay^2+y-2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D=(25-4a)y^2-4y+8$
$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$
$4-200+32a=0$
$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

25. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때 $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근은 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ ……㉠
또, $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로
$\alpha+\beta+\alpha\beta=2a+1$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=2$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $a+b=2a+1$ ……㉢
$ab=2$ ……㉣
㉢, ㉣를 연립하여 풀면
$a=1$, $b=2$ 또는 $a=-2$, $b=-1$

26. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 74

해설

처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면
$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$
$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$㉠
또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$㉡
$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로
처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$
$\therefore\ x=-5$또는 $-7,\quad x=5$또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

27. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0, \quad k(k-6) < 0$

$\therefore \ 0 < k < 6$

한편, ω가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega + \overline{\omega} = -2k, \ \omega\overline{\omega} = 6k$이므로

$\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega\overline{\omega} = (-2k)^2 - 12k$

$= 4k^2 - 12k$

$4k^2 - 12k = 16,$

즉, $k^2 - 3k - 4 = 0$에서

$(k+1)(k-4) = 0 \quad \therefore \ k = -1$ 또는 $k = 4$

$0 < k < 6$이므로 $k = 4$

28. 이차방정식 $x^2+5x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{3}i$ ② $\sqrt{3}i$ ③ $\sqrt{7}i$ ④ $\pm\sqrt{7}i$ ⑤ 0

해설

$D>0$이므로 α, β는 실수

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=1$ $\therefore \alpha<0, \beta<0$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-7$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{7}i$

$\sqrt{-\alpha}i+\sqrt{-\beta}i=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})i$의 꼴이 되므로 $-\sqrt{7}i$가 구하는 값이 될 수 없다.

29. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(1) = 1$을 만족시키는 이차식 $f(x)$를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
$\therefore$ $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$에서
즉, α, β는 $f(x) = 1 - x$의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$은
$(x - \alpha)(x - \beta)$를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
$f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1$,
$f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
$\therefore$ $a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$

30. 사차방정식 $x^4 + 2ax^2 + a + 2 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a < -2$　② $-2 < a < -1$　③ $-1 < a < 2$
④ $a > 2$　⑤ $-1 < a < 0$

해설

$x^2 = t$로 놓으면
$t^2 + 2at + a + 2 = 0$이
서로 다른 양근을 가져야 하므로
(i) $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 > 0$　$\therefore\ a < -1,\ 2 < a$
(ii) $\alpha + \beta = -2a > 0$　$\therefore a < 0$
(iii) $\alpha\beta = a + 2 > 0$　$\therefore\ a > -2$
$\therefore$ (i), (ii), (iii)에서 $-2 < a < -1$