

1. 이차방정식 $ax^2 + 4x - 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a > -2$

② $-2 < a < 0, a > 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a > 2$

⑤ $a < 0, 0 < a < 2$

해설

$ax^2 + 4x - 2 = 0$ 에서

(i) 이차방정식이므로 x^2 의 계수는 $a \neq 0$ 이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$ 이어야

하므로

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (-2a) > 0, 2a + 4 > 0$$

$$\therefore a > -2$$

따라서 실수 a 값의 범위는

$$-2 < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

2. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 허근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하면?

① $k \leq 3$ ② $k > 3$ ③ $k \leq 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$$3x^2 - 6x + k = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$$

$$\therefore k > 3$$

3. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

4. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$$a=2, b'=-2, c=3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

5. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- ㉠ 판별식은 $b^2 - 4ac$ 이다.
- ㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.
- ㉢ $a < 0, c < 0$ 이면 허근만 갖는다.
- ㉣ $a > 0, c < 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.
- ㉥ 한 근이 $p + qi$ 이면 다른 한 근은 $q - pi$ 이다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- ㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능 (참)
- ㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)
- ㉢ $b^2 - 4ac$ 에서 $ac > 0$ 이다.
하지만 $b^2 < 4ac$ 인 경우만 허근을 가짐 (거짓)
- ㉣ 판별식 $b^2 - 4ac$ 에서 $ac < 0$ 이므로 $b^2 - 4ac > 0$ (참)
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)
- ㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p + qi$ 이면 $p - qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

6. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?
- ① 중근 ② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근 ④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a-1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

7. a 가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x 에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 실근을 가진다.
② $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
③ $f(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 허근을 가진다.
④ $g(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
⑤ $g(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1,$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a-1$$

모든 실수 a 에 대하여

$$2a+1 > 2a-1,$$

즉, $D_1 > D_2$ 이므로 $D_1 < 0$ 이면 $D_2 < 0$

8. x 에 대한 다음 방정식의 두 근의 곱은?

$$2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$$

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$(2x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

9. $x^2 - 4kx + (5 - k^2) = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} D/4 &= 4k^2 - (5 - k^2) \geq 0 \\ 4k^2 - 5 + k^2 &\geq 0, 5k^2 \geq 5, \therefore k^2 \geq 1 \\ \alpha + \beta &= 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2 \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \\ 18k^2 &\geq 18, 18k^2 - 10 &\geq 18 - 10 \\ \alpha^2 + \beta^2 &\geq 8, \therefore (\text{최솟값}) = 8 \end{aligned}$$

10. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이고, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5$$

11. 이차방정식 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^4 + \beta^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 13$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$= (13)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$= (13)^2 - 2(-2)^2 = 161$$

12. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α 라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$ 이므로

$$\alpha + \alpha + 2 = \frac{2k}{9} \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\alpha(\alpha + 2) = \frac{k - 5}{9} \dots\dots\textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}\text{에서 } \alpha = \frac{k}{9} - 1,$$

이것을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$k^2 - 9k - 36 = 0, (k - 12)(k + 3) = 0$$

$$\therefore k = 12, -3$$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$$\frac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{|9|} = 2 \text{에서}$$

$$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$k^2 - 9k - 36 = 0 \therefore k = 12, -3$$

13. 이차방정식 $x^2 - (k+1)x + k = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3일 때, 상수 k 의 값들의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근을 2α , 3α 라 하면

$2\alpha + 3\alpha = k + 1$, $(2\alpha)(3\alpha) = k$ 이므로,

$5\alpha = k + 1$, $6\alpha^2 = k$

이 두 식에서 α 를 소거하면

$$6\left(\frac{k+1}{5}\right)^2 = k \text{에서 } 6k^2 - 13k + 6 = 0$$

$$(2k-3)(3k-2) = 0 \therefore k = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

14. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라 하면

근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $\alpha = k - 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면,

$$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$$

$$\therefore k = -2$$

15. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2k^2 - k = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, k 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}, -1$
④ $\frac{1}{2}, -3$

② $-\frac{3}{2}, 1$
⑤ $-\frac{1}{2}, 3$

③ $\frac{3}{2}, 1$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서 두근의 차는 $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$

∴ 주어진 방정식의 두근의 차는

$$\sqrt{16 - 8k^2 + 4k} = 2$$

$$4k - 8k^2 + 16 = 4$$

$$2k^2 - k - 3 = 0$$

$$(k + 1)(2k - 3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

16. 이차방정식 $x^2 - mx + 91 = 0$ 의 두 근, α, β 는 서로소이다. 이때, 실수 m 의 값은? (단, α, β 는 $\alpha > 1, \beta > 1$ 인 자연수)

① 10 ② 20 ③ 35 ④ 55 ⑤ 100

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = 91$

α 와 β 가 서로소이고 자연수이므로

$(\alpha, \beta) = (1, 91)$ 또는 $(7, 13)$ 이다.

여기서 $\alpha > 1, \beta > 1$ 이므로

$(\alpha, \beta) = (7, 13)$

$\therefore m = \alpha + \beta = 20$

17. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ 을 두 근으로 갖고 계수가 정수인 이차방정식은?

① $4x^2 - 3x + 4 = 0$

② $3x^2 - 4x + 4 = 0$

③ $3x^2 + 4x - 4 = 0$

④ $4x^2 + 3x - 4 = 0$

⑤ $3x^2 - 3x + 4 = 0$

해설

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \quad \dots \text{두근의합}$$

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \quad \dots \text{두근의곱}$$

$$\therefore x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

18. 이차방정식 $4x^2 - ax + 2a = 0$ 의 두 근의 합과 곱을 두 근으로 하는 이차방정식이 $2x^2 - bx + 1 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

두 근이 α, β 일 때,

$$\alpha + \beta = \frac{a}{4}, \alpha\beta = \frac{a}{2}$$

$\frac{a}{4}, \frac{a}{2}$ 가 $2x^2 - bx + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\frac{a}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 4, a = 2 \ (a > 0)$$

$$\frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{b}{2}, b = 3$$

$$\therefore a + b = 3 + 2 = 5$$

19. 이차다항식 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 라 놓으면

$f(2x) = a(2x - \alpha)(2x - \beta) = 0$

$a\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0, \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0$

$\alpha + \beta = 12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ 의 합은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

20. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left| \frac{bc}{a^2} \right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

두 근의 곱 $= \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

두 근의 합 $= -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$

$\therefore \left| \frac{bc}{a^2} \right| = \left| \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} \right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

21. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + (k+3) = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(i) 두 근이 실수이므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 1 \cdot (k+3) \geq 0$$

$$k^2 - 7k + 6 \geq 0, (k-1)(k-6) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 1, k \geq 6$$

(ii) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

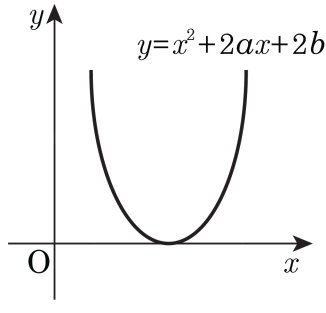
$$2(k-3) < 0, k+3 > 0$$

$$\therefore -3 < k < 3$$

(i), (ii)에 따라 $-3 < k \leq 1$

$\therefore$ 정수 k 의 최댓값은 1

22. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
- ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
- ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$
㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$
판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$
 $= 2b - b^2 - 2$
 $= -(b^2 - 2b + 2)$
 $= -(b - 1)^2 - 1 < 0$
 $\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

23. 방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때 $a^3 + b^3 - 3ab$ 의 값을 구하면 ? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - \{1 + (a + b)^2\} \cdot 2 \geq 0$$

$$-(a + b)^2 - 2(a + b) - 1 \geq 0$$

양변에 -1 을 곱하면

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\{ (a + b) + 1 \}^2 \leq 0$$

그런데 a, b 가 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 - 3ab &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab \\ &= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab \\ &= -1 \end{aligned}$$

25. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 를 x 에 대해 정리하면
 $2x^2 + (y - 1)x - y^2 + 2y + k$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (y - 1)^2 - 4 \times 2(-y^2 + 2y + k)$$
$$= 9y^2 - 18y - 8k + 1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$$

$$\therefore k = -1$$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
 $(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{r} a+2b=-1 \\ -) a- \quad b=2 \\ \hline 3b=-3 \end{array}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -1$$

$$\therefore k = ab = -1$$

26. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하자. α^2, β^2 이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q - 1) = 0$ 의 두 근일 때, p 의 값은?

- ① -4 또는 1
- ② -3 또는 2
- ③ -2 또는 3
- ④ -1 또는 4
- ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\alpha^2 + \beta^2 = 3p, \alpha^2\beta^2 = 4(q - 1) \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서
 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $\therefore 3p = p^2 - 2q \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$
 $\therefore 4(q - 1) = q^2 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉣}$ 에서 $q^2 - 4q + 4 = 0, (q - 2)^2 = 0$
 $\therefore q = 2$
 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하여 정리하면,
 $p^2 - 3p - 4 = 0, (p + 1)(p - 4) = 0$
 $\therefore p = -1, 4$

27. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

28. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = 16$ 이다. 실수 k 의 값은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0, \quad k(k-6) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 6$$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -2k, \quad \omega\bar{\omega} = 6k \text{ 이므로}$$

$$\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega\bar{\omega} = (-2k)^2 - 12k$$

$$= 4k^2 - 12k$$

$$4k^2 - 12k = 16,$$

$$\text{즉, } k^2 - 3k - 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(k+1)(k-4) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

$$0 < k < 6 \text{ 이므로 } k = 4$$

29. $x^2 + kxy - 2y^2 + 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

- ① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 6

해설

$$\begin{aligned} x^2 + kyx - (2y^2 - 3y + 1) &= 0 \text{에서} \\ D &= k^2y^2 + 4(2y^2 - 3y + 1) \\ &= (k^2 + 8)y^2 - 12y + 4 \end{aligned}$$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 36 - 4(k^2 + 8) = 0 \\ \therefore k &= \pm 1 \end{aligned}$$

30. 이차방정식 $x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값을 구하면?

- ① $\pm \sqrt{3}i$ ② $\sqrt{3}i$ ③ $\sqrt{7}i$ ④ $\pm \sqrt{7}i$ ⑤ 0

해설

$D > 0$ 이므로 α, β 는 실수

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 1 \quad \therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \\ &= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = -7 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{7}i$$

$\sqrt{-\alpha}i + \sqrt{-\beta}i = (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta})i$ 의 꼴이 되므로 $-\sqrt{7}i$ 가 구하는 값이 될 수 없다.

31. $m > 0$ 이고 이차방정식 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$ 의 두 근의 절대값의 비가 3 : 2일 때, 정수가 아닌 m 의 값은?

- ① $\frac{25}{9}$ ② $\frac{26}{9}$ ③ $\frac{28}{9}$ ④ $\frac{29}{9}$ ⑤ $\frac{31}{9}$

해설

$m > 0$ 에서 두 근의 곱이 $-\frac{24}{m} < 0$ 이므로

서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.

따라서, 방정식의 두 근을 3α , -2α 라 놓을 수 있다.

근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3\alpha + (-2\alpha) = -\frac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\frac{24}{m} \end{cases}$$

$$\therefore \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m} \quad \therefore (3m-5)^2 = 4m$$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1) = 0$

$$\therefore m = \frac{25}{9}, 1$$

따라서 정수가 아닌 m 의 값은 $\frac{25}{9}$ 이다.

32. 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(1) = 1$ 을 만족시키는 이차식 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x) = x^2 - x + 1$

② $f(x) = x^2 - 2x + 2$

③ $f(x) = x^2 + x - 1$

④ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

⑤ $f(x)$ 는 모두 4개 있을 수 있다.

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 1$
 $\therefore f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 에서
즉, α, β 는 $f(x) = 1 - x$ 의 두 근이다.
따라서, 다항식 $f(x) + x - 1$ 은
 $(x - \alpha)(x - \beta)$ 를 인수로 가진다.
그런데 $f(x)$ 가 이차식이므로
 $f(x) + x - 1 = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - x + 1)$
 $f(x) = ax^2 - (a + 1)x + a + 1$,
 $f(1) = a - (a + 1) + a + 1 = 1$
 $\therefore a = 1$
따라서, 구하는 이차식은 $f(x) = x^2 - 2x + 2$

33. x 의 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 2(k^2-1) = 0$ 의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k 의 최솟값을 구하면?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 근을 α, β 라 하면
(i) 두 근이 모두 양수일 때
 $\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) > 0,$
 $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-1) \geq 0$
이들의 공통 범위를 구하면
 $-3 \leq k < -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$
(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,
 $\alpha\beta = 2(k^2-1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때
 $\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) = 0$
 $\therefore k = -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$
구하는 k 의 범위는 $\textcircled{\text{㉠}}$ 또는 $\textcircled{\text{㉡}}$ 또는 $\textcircled{\text{㉢}}$ 이므로
 $-3 \leq k \leq 1$
 $\therefore$ 최솟값 -3