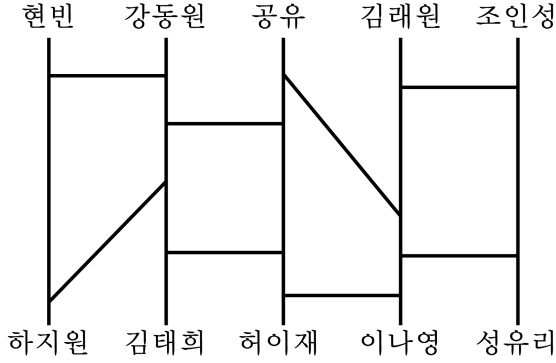


1. 남녀 혼성 장기자랑에 참여한 H 남고 남학생 5명과 S 여고 여학생 5명이 파트너를 정하려고 한다. 남녀 한 명도 빠짐없이 팀을 이루기 위한 방법으로 사다리타기로 파트너를 정하기로 하였다. 현빈과 김태희가, 강동원과 이나영이, 공유와 성유리가, 김래원과 허이재가 짝을 이루었다면 남은 조인성의 파트너는 누구인가?

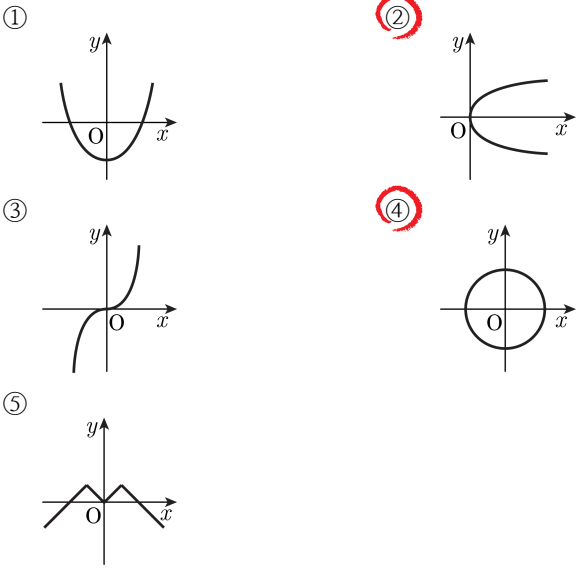


- ① 하지원 ② 성유리 ③ 이나영
④ 허이재 ⑤ 김태희

해설

일대일 대응이므로 조인성-하지원이 파트너가 된다.

2. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?



해설

②, ④의 그래프는 하나의 x 의 값에 대응되는 y 가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x 축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X 에서 Y 로의 함수)

3. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$ 이면
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$ 이다.
위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
 $f(x) = 1$ 은 부적당
 $\therefore f(0) = 0$

4. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
 $\therefore 4^3 = 64$
 $\therefore a + b = 64$

5. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$ ② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$ ④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$

6. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -x^2 + x$ 에 대하여 $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$ 의 합숫값을 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -47 ② -35 ③ 12 ④ 37 ⑤ 47

해설

$$a = (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-2) = -5$$

$$b = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(7) = -42$$

$$\therefore a - b = -5 - (-42) = 37$$

7. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

8. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x + 1$ 로 정의될 때, 함수 f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

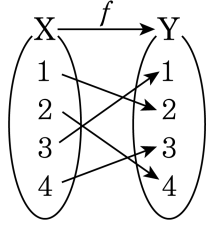
$$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9 \text{ 이므로}$$

함수 f 의 치역은 $\{3, 5, 7, 9\}$

따라서, 치역의 모든 원소의 합은 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

9. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



- ① 함수이다.
- ② 정의역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ③ 공역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 4} 이다.
- ⑤ 일대일 대응이다.

해설

- ① 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
- ②, ③ 정의역과 공역은 모두 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 3, 4}이다.
- ⑤ 집합 X 의 각 원소에 대한 함숫값이 모두 다르므로 일대일대응이다.

10. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$$f(x) = 2x^2 - 3x \text{ 이므로}$$

$$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

11. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

12. 정의역이 $\{0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 함수 f, g 가 서로 같으므로

정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이다.

즉, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로

$f(0) = b$, $g(0) = 1$ 에서 $b = 1$

$f(1) = 1 + a + b$, $g(1) = 3$ 에서 $a + b = 2$

$\therefore a = 1$

$\therefore a - b = 0$

13. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

14. 집합 X 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 가 항등함수가 되도록 하는 집합 X 의 개수는 몇 개인가? (단, $X \neq \emptyset$)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$f(x) = x^2 + 2x$ 가 항등함수가 되려면

$f(x) = x$ 를 만족해야 한다.

즉, $x^2 + 2x = x$ 에서

$$x^2 + x = 0, \quad x(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1, 0$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{-1, 0\}$ 의

공집합이 아닌 부분집합이므로

집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

15. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 0$ 이다.
 $x = 1, y = -1$ 을 대입하면
 $f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = 0$
 $f(-1) = -f(1), f(1) = 3$ 이므로
 $\therefore f(-1) = -3$

16. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

17. 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수 f 가 $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$ 과 같을 때 $f(\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2})$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{2}$ 와 $1-\sqrt{2}$ 는 모두 무리수이므로,
 $f(\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$
 $f(1-\sqrt{2}) = 1-(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
 $\therefore f(\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1$

18. 함수 $f(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $f^{10}(x) = ax + b$ 라 할 때, $a - b$ 의 값은?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

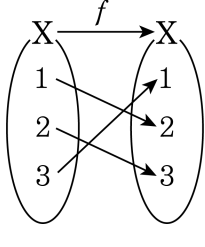
- ① $2^{10} - 1$
- ② 2^{10}
- ③ $2^{11} - 1$
- ④ 2^{11}
- ⑤ $2^{12} - 1$

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x - 1) \\ &= 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(2x - 1) \\ &= 4(2x - 1) - 3 = 8x - 7 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(2x - 1) \\ &= 8(2x - 1) - 7 = 16x - 15 \\ &\vdots \\ f^{n-1} &= 2^{n-1} \cdot x - (2^{n-1} - 1) \text{로 놓으면} \\ f^n(x) &= (f^{n-1} \circ f)(x) = f^{n-1}(f(x)) \\ &= f^{n-1}(2x - 1) = 2^{n-1}(2x - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n x - (2^n - 1) \end{aligned}$$

$n = 10$ 을 대입하면 $f^{10}(x) = 2^{10}x - (2^{10} - 1)$ 이므로
 $\therefore a = 2^{10}$, $b = -2^{10} + 1$ 이다.
 $\therefore a - b = 2^{10} + 2^{10} - 1 = 2^{11} - 1$

19. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x), f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

- ① -2
- ② 2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 0

해설

위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면
 $f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$
같은 방법으로 $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.
 $\therefore f^3(x) = x$ 이므로
 $f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x)$,
 $f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$
 $\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2, f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$
 $\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$

20. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$