1. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$

2. 두 점 $(4,\ 3)$, $(4,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x + 2$ ② $y = x - 3$ ③ $x = 3$

④ $x = 4$ ⑤ $y = -1$

해설

두 점 $(4,3),(4,-1)$을 지나는 직선의 방정식은 $x = 4$

3. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

① 중심이 $(2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원

② 중심이 $(2,\ -1)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원

③ 중심이 $(-2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원

④ 중심이 $(2,\ -1)$ 이고 반지름의 길이가 4 인 원

⑤ 중심이 $(-2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$
$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$
$\therefore \quad$ 중심은 $(2,\ -1)$ 이고,
반지름은 4 이다.

4. 복소수 $z = i(a + \sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① 5 ② $\sqrt{5}$ ③ 0 ④ ± 5 ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$z = i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i)$

$= -2a\sqrt{5} + (a^2 - 5)i$

$z = \bar{z}$ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.

$\therefore\ a = \pm\sqrt{5}$

5. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1,\ \dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5,\ b=6$

$\therefore a+b=11$

6. 세 점 A $(-1,1)$, B $(-3,-2)$, C $(2,-1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4,2)$ ② $(2,4)$ ③ $(3,5)$

④ $(5,3)$ ⑤ $(1,-5)$

해설

D (a,b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$의 중점과 $\overline{BC}$의 중점은 일치한다.

$\therefore \left(\frac{1}{2},0\right) = \left(\frac{a-3}{2},\frac{b-2}{2}\right)$

$\therefore \ a=4\ ,\ b=2$

7. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

8. 점 $(k, 1)$ 이 부등식 $y \geq 2x - 5$ 가 나타내는 영역 안에 있도록 하는 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k \leq 1$　② $k \leq 2$　③ $k \leq 3$　④ $k \leq 4$　⑤ $k \leq 5$

해설

점 $(k, 1)$ 이 부등식 $y \geq 2x - 5$ 를 만족하므로

$1 \geq 2k - 5,\ 2k \leq 6$

$\therefore k \leq 3$

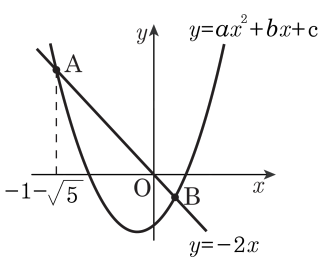
9. x에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$의 최대공약수가 $x-1$일 때, pq의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(x)=x^3+px^2-q^2$,
$q(x)=x^3-(3q-p)x+2(q-1)$라 놓으면
최대공약수가 $x-1$이므로
$f(1)=1+p-q^2=0\cdots$㉠
$g(1)=1-(3q-p)+2(q-1)=0$에서
$p-q-1=0\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $q^2-q-2=0,\ (q-2)(q+1)=0$
(i) $q=2$일 때, ㉡ $p=3$
$f(x)=(x-1)(x+2)^2,\ g(x)=(x-1)^2(x+2)$
∴ $G.C.D$가 $x-1$이라는 것에 모순
(ii) $q=-1$일 때, ㉡ $p=0$
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$,
$g(x)=(x-1)(x^2+x+4)$
∴ $G.C.D$는 $x-1$
∴ $pq=0$

10. 유리수 a, b, c에 대하여 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$와 직선 $y = -2x$의 그래프가 아래의 그림과 같이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고 점 A의 x좌표는 $-1 - \sqrt{5}$이다. 두 점 A, B의 중점의 좌표는?



① $(-\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$ ② $(-1,\ \sqrt{5})$

③ $(-2,\ 1)$ ④ $(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$

⑤ $(-1,\ 2)$

해설

두 그래프의 교점의 x좌표는 두 함수를
연립하여 세운 방정식의 해와 같으므로
$ax^2 + bx + c = -2x$, $ax^2 + (b+2)x + c = 0$의
한 해가 $-1 - \sqrt{5}$이다.
그런데 a, b, c가 모두 유리수이므로
이 이차방정식의 나머지 한 해는 $-1 + \sqrt{5}$이다.
또, A, B는 $y = -2x$ 위의 점이므로
A, B의 좌표는
$A(-1 - \sqrt{5},\ 2 + 2\sqrt{5})$, $B(-1 + \sqrt{5},\ 2 - 2\sqrt{5})$이다.
따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{(-1-\sqrt{5})+(-1+\sqrt{5})}{2},\ \frac{(2+2\sqrt{5})+(2-2\sqrt{5})}{2}\right)$$

$= (-1,\ 2)$

11. 점 O(0, 0), A(4, 2) 를 잇는 선분 OA 의 수직이등분선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라고 할 때, $m^2 + n^2$ 의값을 구하면?

① 20 ② 29 ③ 30 ④ 39 ⑤ 49

해설

수직이등분선은 $\overline{OA}$ 기울기에 수직하고 $\overline{OA}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

i) $\overline{OA}$ 의 기울기 : $\frac{1}{2}$

수직이등분선의 기울기 : -2

ii) $\overline{OA}$ 의 중심 : $(2, 1)$

$\therefore \quad y = -2(x-2) + 1 = -2x + 5$

$\Rightarrow \quad m^2 + n^2 = 29$

12. 중심이 $y = 2x$ 위에 있고, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ ④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

해설

중심이 $y = 2x$ 위에 있다고 했으므로
두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 을 지나는
원의 중심은 $(a, 2a)$ 로 나타낼 수 있다.
$(a,\ 2a)$ 를 중심으로 하는 원을 식으로 표현하면
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$ 이다.
따라서 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 은
$(x-a)^2 + (y-2a)^2 = r^2$ 를 지나므로 대입했을 때 등식이 성립한다.
두 식을 연립하면, 두 점 $(2,\ 2)$, $(1,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식이
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 임을 알 수 있다.

13. 두 다항식 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$, x^3+2x^2-x-2의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a=-2$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$f(x)=2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
최대공약수가 이차식이므로 $f(x)$는 $x+1$
또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.
$f(-2)=-8-4a-8-4a\neq 0$이므로
$x+1$이 인수이다.
$\therefore\ f(-1)=0$일 때 $a=-2$

14. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\dfrac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0 \quad \therefore\ w^3=1$

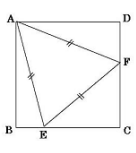
$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2}\\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1}\\ &= \frac{1}{w-1}\\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)}\\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2}\\ &= \frac{w+2}{-3}\\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}w-\dfrac{2}{3}=aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \quad \therefore\ a+b=-1$

15. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 ABCD 가 있다. 변 BC, CD 위에 각각 점 E, F 를 잡아 △AEF 가 정삼각형이 되도록 할 때, $\overline{BE}$의 길이를 구하면?



① $4-2\sqrt{3}$ ② $3-\sqrt{3}$ ③ $3-2\sqrt{2}$
④ $3-\sqrt{2}$ ⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$\overline{BE}=\overline{DF}=x$, $\overline{EC}=\overline{FC}=y$라 하면,
$x+y=2$
$\overline{AE}$ 는 (△ABE 가 직각삼각형이므로)
$\overline{AE}=\sqrt{4+x^2}$
$\overline{EF}$ 는 (△EFC 가 직각이등변삼각형이므로)
$\overline{EF}=\sqrt{2}y$
△AEF 는 정삼각형이므로
$\overline{AE}=\overline{EF}$
$\Rightarrow \sqrt{4+x^2}=\sqrt{2}y \Leftrightarrow 4+x^2=2y^2$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 4+x^2=2y^2 \end{cases}$$

을 연립하여 풀면 $x=4-2\sqrt{3}$