1. 수직선 위의 두 점 P(2), Q(x)에 대하여 $\overline{PQ}=3$이고, x의 값을 α,β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

i) $x>2$일 때, $x-2=3$ $\therefore$ $x=5$
ii) $x<2$일 때, $2-x=3$ $\therefore$ $x=-1$
따라서 α,β의 값은 -1 또는 5
$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=26$

2. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2\cdots$㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-1-a)^2+(-5-3)^2=a^2+2a+65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2=(a-3)^2+(3-7)^2=a^2-6a+25$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(3+1)^2+(7+5)^2=160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2-4a+90=160$
$\therefore\ a^2-2a-35=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

3. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$\mathrm{A}(\sqrt{3}-1,\ 1-\sqrt{2}),\ \mathrm{B}(\sqrt{3},\ 1+\sqrt{2})$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{1+8} = 3$$

4. 두 점 A$(-4,\ 2)$, B$(1,\ 5)$에서 같은 거리에 있고, y축 위에 있는 점 P의 좌표는?

① P$(0,\ -2)$ ② P$(0,\ -1)$ ③ P$(0,\ 1)$

④ P$(0,\ 2)$ ⑤ P$\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$

해설

점 P의 좌표를 P$(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(-4-0)^2 + (2-b)^2 = (1-0)^2 + (5-b)^2$

$b^2 - 4b + 20 = b^2 - 10b + 26$

$6b = 6$

$\therefore\ b = 1$

따라서 점 P의 좌표는 P$(0,\ 1)$이다.

5. 직선 $y=2x$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(3,1)$에서 같은 거리에 있는 점을 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$라고 할 때, $\alpha\beta$를 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=2x$ 위에 있으므로 $\mathrm{P}(\alpha,2\alpha)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(\alpha-2)^2+(2\alpha)^2=(\alpha-3)^3+(2\alpha-1)^2$

$-4\alpha+4=-6\alpha-4\alpha+10$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=2$

6. 세 점 $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,-1)$, $\mathrm{C}(5,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형

③ $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형

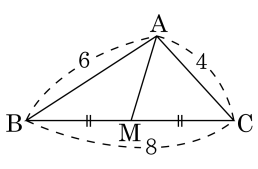
④ $\angle\mathrm{A}=90^\circ$인 직각삼각형

⑤ $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형

해설

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로
$\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

7. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 10

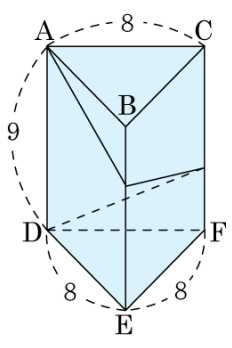
해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$
$\therefore \overline{AM}^2=10$

8. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

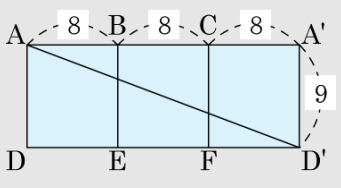


▶ 답:

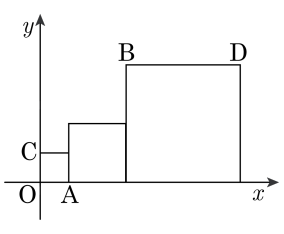
▷ 정답: $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2 + 9^2} = \sqrt{576 + 81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



9. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 C$(0,4)$, 점 D$(21,12)$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로
점 A$(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로
점 B$(21-12,\ 12)$
즉, B$(9,\ 12)$
$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(9-4)^2+12^2}=13$

10. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 $\mathrm{P}\ (a,\ 0)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$
Q의 좌표를 $\mathrm{Q}\ (0,\ b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$에서
$\sqrt{3^2+(b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$
두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$
$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

11. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(2,2)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 길이를 구하면?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ 5

해설

$x+y=2$ 위에 있는 점 P 는
$(\alpha, -\alpha+2)$ 로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$\alpha^2 + (-\alpha-4)^2 = (\alpha-2)^2 + (-\alpha)^2$

$\alpha = -1$

$\mathrm{P}(-1,\ 3)$

$\therefore\ \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$