

1. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$$

$$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$$p = -\frac{2}{3}, q = -5$$

$$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$$

2. $-2 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$, $-2 \leq x \leq 1$ 에서

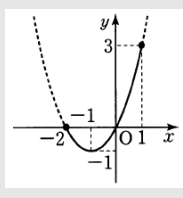
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.

즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$

따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,

$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

구하는 합은 $3 - 1 = 2$



3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1, 5)$ 를 대입하면 $a = 2$

따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면

$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2$, $b = 4$, $c = -1$

$\therefore abc = -8$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3

② 7

③ 11

④ -3

⑤ -5

해설

$$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$$

$$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$$

$$\therefore f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$$

$$\text{따라서 } a + b + c = 3$$

5. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x + 1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k + 3)$ 이다.

주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$$\therefore k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

6. 함수 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$ 이므로

분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore x = 1$ 일 때 최댓값 $\frac{6}{3} = 2$

7. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

따라서 함수의 그래프는 점(1,2) 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로

(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은

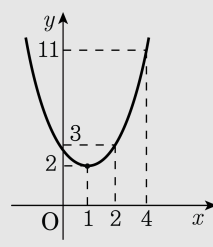
$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$$

$$\therefore m = 3$$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$$\therefore M = 11$$

$$\therefore M + m = 14$$



8. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

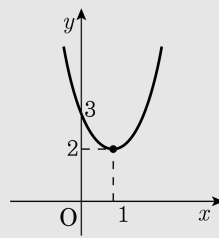
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

9. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x 의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.
 $f(0) = 3$, $f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위는 $2 < y < 3$



10. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3

② -2

③ 0

④ 6

⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 3$
 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값 : $(-2 - 1)^2 - 3 = 6$

11. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$$

$$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$$g(a) = -(a-2)^2 + 6 \text{ 에서}$$

$g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

12. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \leq a \leq 2$)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$ 이므로

$$\text{최솟값 } m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{최댓값 } M = f(3) = 9 - 3a$$

$$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a + 6)^2 + 18$$

이때, $0 \leq a \leq 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

13. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.
 $\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$
따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0을 가진다.

14. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$$

이므로 $x = -a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.

$$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$$

따라서 M 은 $a = -2$ 일 때 최댓값 -8 을 가진다.

15. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$$

... ㉠

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$$t = \frac{2}{3} \text{ 일 때 최대이고 최댓값은}$$

$$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

16. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{1}$
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
 $t \geq 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 범위에서 $\textcircled{1}$ 의 최솟값은
 $t = 2$ 일 때 1이다.

17. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

$t = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$f(x) = g(t) = t(t + 1) + 3t - 6$$

$$= t^2 + 4t - 6$$

$$= (t + 2)^2 - 10 \quad (t \geq 1)$$

따라서 구하는 최솟값은

$$g(1) = (1 + 2)^2 - 10 = -1$$

18. $f(x) = x^2 - x + 1$ 일 때, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(4 - f(x))$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$f(4 - f(x))$ 에서 $4 - f(x) = t$ 라 두면,

$$t = -x^2 + x + 3$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ 에서}$$

$$3 \leq t \leq \frac{13}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} f(4 - f(x)) &= f(t) = t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \left(3 \leq t \leq \frac{13}{4}\right) \end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최솟값 7 을 갖는다.

19. $x^2 + y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2y + x^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$ 에서 $x^2 = 4 - y^2$
 x, y 가 실수이므로
 $x^2 = 4 - y^2 \geq 0, y^2 \leq 4$
 $\therefore -2 \leq y \leq 2$
 $2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$ 을 대입하면
 $2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$
 $= -y^2 + 2y + 4 = -(y - 1)^2 + 5$
이 때, $-2 \leq y \leq 2$ 이므로 $y = 1$ 일 때
최댓값은 5, $y = -2$ 일 때 최솟값은 -4 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

20. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0 \text{에서 } a^2 \geq 3$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2 - 2(9 - 2a^2) \\ &= 4a^2 - 18 + 4a^2 = 8a^2 - 18\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 \geq 8 \times 3 - 18 = 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값은 6

21. 실수 x, y 가 $2x + y = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

- ① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{17}{5}$

해설

$$2x + y = 4 \text{ 에서 } y = -2x + 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \text{에서 } x^2 + y^2 &= x^2 + (-2x + 4)^2 \\ &= 5x^2 - 16x + 16 \\ &= 5\left(x^2 - \frac{16}{5}x\right) + 16 \\ &= 5\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}\end{aligned}$$

따라서 $x^2 + y^2$ 은 $x = \frac{8}{5}$ 일 때,

최솟값 $\frac{16}{5}$ 을 갖는다.

22. x, y 가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7 \\ &= (x - 3)^2 + 2(y + 1)^2 - 4 \text{ 이므로} \\ & x = 3, y = -1 \text{ 일 때, 최솟값 } -4 \text{ 를 갖는다.} \end{aligned}$$

23. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$
 $= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1$
이 때, x, y, z 가 실수이므로
 $(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$
따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1 이다.

24. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x+2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1 이다.

25. $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m 을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$2x - y = k$ 로 놓으면
 $y = 2x - k \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 을 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면
 $x^2 + (2x - k)^2 = 5$
 $\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 x 에 대한 이차방정식으로 보면
 x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) \geq 0, k^2 \leq 25$
 $\therefore -5 \leq k \leq 5$
따라서 k 의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y 의 값은
 $\textcircled{2}$ 에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0, 5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
 $\textcircled{1}$ 에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$ 이므로
 $m + \alpha + \beta = 6$

26. 실수 x, y 가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을 만족시킬 때, x 의 최댓값과 y 의 최댓값의 합은?

- ① $2\sqrt{2} - 1$
- ② $2\sqrt{2} + 1$
- ③ $2\sqrt{2} + 2$
- ④ $\sqrt{2} + 4$
- ⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을
(i) x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$ 에서 x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0, y^2 \leq 4$
 $\therefore -2 \leq y \leq 2$
따라서, y 의 최댓값은 2이다.
(ii) y 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$ 에서 y 가 실수이므로
 $\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0, x^2 \leq 8$
 $\therefore -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
따라서, x 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.
(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

27. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y 의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

- (1) x 의 값의 범위를 구하여라.
(2) 빗변의 길이를 z 라 할 때, z^2 을 x 에 관한 식으로 나타내어라.
(3) z^2 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

① (1) $2 \leq x \leq 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52

② (1) $1 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51

③ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50

④ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52

⑤ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

해설

(1) $x + y = 10$ 에서 $y = 10 - x$ 이고
삼각형의 넓이가 8 이상이므로

$$\frac{1}{2}xy \geq 8, \quad \frac{1}{2}x(10 - x) \geq 8$$

$$x^2 - 10x + 16 \leq 0, \quad (x - 2)(x - 8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 8$$

(2) 피타고라스의 정리에 의해

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$

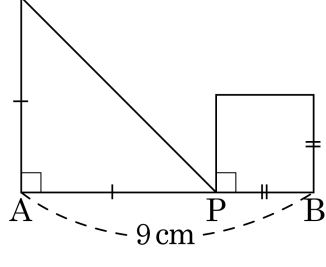
(3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50$

이 때, $2 \leq x \leq 8$ 이므로 z^2 은 $x = 5$ 일 때

최솟값 50, $x = 2$ 또는 $x = 8$ 일 때

최댓값 68을 갖는다.

28. 길이가 9cm인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP의 길이는?



- ① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
 ④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{AP} = 6(\text{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

29. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
 $\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$
따라서 m 은 $a = 2$ 일 때 최댓값 0을 가진다.

30. 두 함수 $f(x) = |x - 2| - 5$, $g(x) = x^2 + 6x + 8$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 라고 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x - 2| - 5 = t$ 로 놓으면
 $y = g(f(x)) = g(t) = t^2 + 6t + 8 = (t + 3)^2 - 1$
그런데 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $-5 \leq t \leq -2$ 이므로
 y 의 값은 $t = -5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,
 $t = -3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.
 $\therefore M = 3, m = -1$
 $\therefore M + m = 2$

31. $2x^2 + y^2 = 8$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $4x + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2 + y^2 = 8$ 에서

$y^2 = 8 - 2x^2$ 으로 놓으면

$y^2 = 8 - 2x^2 \geq 0, x^2 - 4 \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

이 때, $y^2 = 8 - 2x^2$ 을 $4x + y^2$ 에 대입하면

$4x + y^2 = 4x + (8 - 2x^2) = -2(x - 1)^2 + 10$

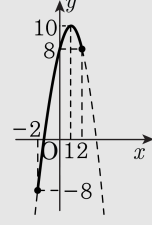
여기서 $f(x) = 4x + y^2 = -2(x - 1)^2 + 10$

이라고 하면 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로

다음 그림에서 $x = 1$ 일 때

$f(x)$ 의 최댓값은 10

$x = -2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2 - 1)^2 + 10 = -8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + (-8) = 2$

32. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + 5$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x-1)^2 \geq 0, (y+3)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

33. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, \quad (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

34. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$$y^2 - 2y + (x^2 + 2x - 2) = 0$$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (x^2 + 2x - 2) \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0, \quad (x + 3)(x - 1) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq x \leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

35. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{A}$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$5k^2 + 4xk + (x^2 - 1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다. 따라서, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4} = (2x)^2 - 5(x^2 - 1) \geq 0$$

$$-x^2 + 5 \geq 0, \quad x^2 - 5 \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots \cdots \textcircled{C}$$

그런데 α, β 는 $\textcircled{A}$ 의 실근이므로 $\textcircled{C}$ 의 범위 안에 있어야 한다.

$$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

36. 길이가 80 m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대로 하려면 이 울타리의 가로 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

- ① 10 m ② 20 m ③ 30 m ④ 40 m ⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40 - x)$ m 이므로
목장의 넓이를 y m² 라 하면
 $y = x(40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400 \cdots \cdots \textcircled{1}$
이 때, $0 < x < 40$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은 $x = 20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.
따라서, 목장의 넓이를 최대로 하려면 울타리의 가로의 길이는 20 m 로 해야 한다

37. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x\%$ 감소한다고 한다. 이 때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x 의 값은?
- ① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a 원, 판매량을 b 개라 하자.
가격을 $x\%$ 올리면 상품 1개당 판매 가격이 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$ 개이므로
판매 금액은

$$\begin{aligned} & ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right) \\ &= ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300} \\ &= \frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x) \\ &= \frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000) \\ &= \frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\} \end{aligned}$$

따라서 $x=25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

38. 길이가 20m인 철망을 이용하여 벽을 한 면으로 하는 직사각형 모양의 가축 우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이가 최대가 되도록 만들 때, 그 넓이를 구하여라.



▶ 답 : m²

▷ 정답 : 50 m²

해설

가축 우리의 세로의 길이를 x m라고 하면
가로의 길이는 $(20 - 2x)$ m이다.
가축 우리의 넓이를 y m²라고 하면
 $y = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$
 $= -2(x - 5)^2 + 50$
한편, $x > 0$ 이고 $20 - 2x > 0$ 이므로
 $0 < x < 10$
따라서 $x = 5$ 일때
가축 우리의 최대 넓이는 50 m²이다.