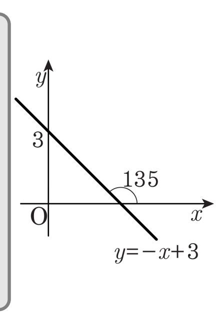
1. 함수 $y = -x + 3$ 의 그래프와 x 축의 양의 방향이 이루는 각 θ 는 몇 $^\circ$ 인지 구하면?

① 45°　② 60°　③ 120°　④ 135°　⑤ 150°

해설

$y = -x + 3$ 를 그리면
기울기 : -1 , y 절편 : 3 이므로
다음 그림과 같다.
이 때, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ 는
$-1 = \tan\theta$ 에서 $\theta = 135^\circ$



2. $ac < 0$, $bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답: 사분면

▷ 정답: 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0$, $bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore$ $abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

3. 다음<보기> 중 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 과 서로 수직인 직선을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $y=2x+1$ ㉡ $y=-2(x-1)$

㉢ $y=-2x+3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로

직선 $y\ \frac{1}{2}x+1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

기울기가 -2 인 직선은 ㉡, ㉢이다.

4. 직선 $x+ay+1=0$이 $x-y+1=0$과는 수직이고, $x+(2-b)y-1=0$과는 평행일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x+ay+1=0 \cdots ㉠$
$x-y+1=0 \cdots ㉡$
$x+(2-b)y-1=0 \cdots ㉢$
㉠⊥㉡ : $1\times1+a\times(-1)=0$
$\therefore\ a=1$
㉠ // ㉢ : $\dfrac{1}{1}=\dfrac{a}{2-b}\neq\dfrac{1}{-1}$
$\Rightarrow a=2-b$
$\Rightarrow 1=2-b$
$\therefore\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

5. 세 직선 $2x-y-4=0,\ x-2y-2=0,\ y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠
$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡
$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로
㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2,\ y=0$
두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로
$0=2a+2,\ 2a=-2$
$\therefore\ a=-1$

6. 두 직선 $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$의 교점과 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$　② $x+y+1=0$　③ $x-y-1=0$
④ $x-y+2=0$　⑤ $x+y+2=0$

해설

두 직선 $2x+y-4=0$과 $x-2y+3=0$의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$2x+y-4+k(x-2y+3)=0\cdots$㉠
이때, ㉠이 점 $(2,3)$을 지나므로 $3-k=0$
$\therefore\ k=3$
$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-y+1=0$

7. 원점에서 직선 $3x - 4y - 5 = 0$에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$\frac{|0 \times 3 + 0 \times (-4) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$

8. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a=2$

9. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \quad \frac{-3-2}{3-0} = \frac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow \quad a = 7$

10. $ab<0$, $bc<0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제1 사분면 ② 제2, 3 사분면 ③ 제4 사분면
④ 제3 사분면 ⑤ 제3, 4 사분면

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$ab<0,\ bc<0$이므로 기울기는 양수, y 절편은 양수이다.

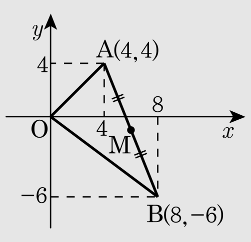
$\therefore$ 제4분면은 지나지 않는다.

11. $O(0,0)$, $A(4,4)$, $B(8,-6)$에서 원점을 지나고 $\triangle OAB$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{1}{6}x$　② $y=-\frac{1}{5}x$　③ $y=-\frac{1}{4}x$
④ $y=-\frac{1}{3}x$　⑤ $y=-\frac{1}{2}x$

해설

구하고자 하는 직선은 원점과 $\overline{AB}$의 중점 $M(6,\ -1)$을 지나므로



$y-0=\frac{-1-0}{6-0}(x-0)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{6}x$

12. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1-y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a=-2,\ b=+1$

$\therefore\ a+b=-1$

13. 다음 두 직선 $3x+4y=21$, $3x+4y=11$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=21$ 의 점$(7,0)$

$\Rightarrow \dfrac{|7\times3+0\times4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

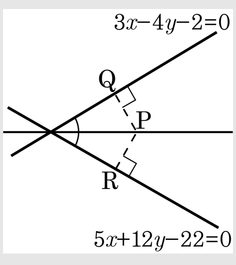
14. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

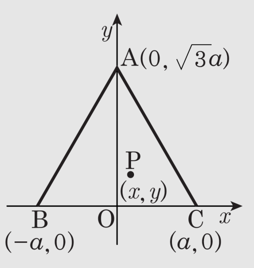
15. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P 의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분

④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC 의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C 의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$ 이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

16. 두 점 $(1,\ -2)$, $(3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, $a-b$의 값은?

① 1 ② 4 ③ 7 ④ 10 ⑤ 13

해설

두 점 $(1,-2)$, $(3,6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\dfrac{6+2}{3-1}(x-1)$

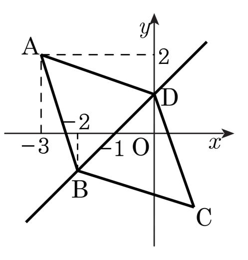
$y+2=4(x-1)$

$\therefore y=4x-6$

즉, $a=4,\ b=-6$

$\therefore a-b=4-(-6)=10$

17. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD 의 중점은 $\mathrm{M}(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로
$\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$,
$\overline{\mathrm{AM}}$ 의 기울기가 -1 이므로
$\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기는 1,
점 B와 점 D의 y값을 a, b라 하면
$b-a=2$, $\dfrac{a+b}{2}=0$ 이므로 $a=-1$, $b=1$ 이다.
$\therefore\ \mathrm{D}(0,\ 1)$
$\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{MD}}=\sqrt{2}$ 이므로
마름모 ABCD 의 넓이는
$4\left(\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=8$

18. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$　　② $y = -\frac{2}{3}x$　　③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = -\frac{4}{3}x$　　⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을
$y = kx(k \neq 0)$ 이라 하면,
$(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 이므로

$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, $|2k-1| = \sqrt{k^2+1}$, $k(3k-4) = 0$

$k = \frac{4}{3}$ $(\because k \neq 0)$

$\therefore\ y = \frac{4}{3}x$

19. 원점과 직선 $2x - y - 5 + k(x + 2y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\dfrac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{2}{5}$　③ $\dfrac{3}{5}$　④ $\dfrac{4}{5}$　⑤ 1

해설

점 $P(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

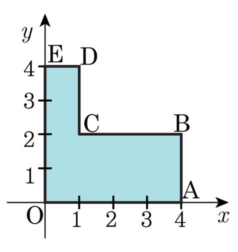
원점과 직선$(2 + k)x + (2k - 1)y - 5 = 0$ 사이의 거리

$f(k)$ 는 $f(k) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{(2 + k)^2 + (2k - 1)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5(1 + k^2)}}$

$$\therefore \ \frac{1}{\{f(k)\}^2} = \frac{k^2 + 1}{5}$$

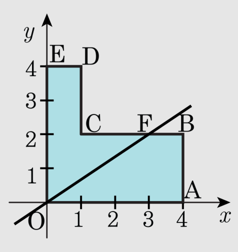
따라서, $k = 0$ 일 때, 최솟값 $\dfrac{1}{\{f(0)\}^2} = \dfrac{1}{5}$ 이다.

20. 아래 그림과 같이 점 O(0, 0), A(4, 0), B(4, 2) C(1, 2), D(1,4), E(0,4) 를 꼭지점으로 하는 도형의넓이를 직선 $y = ax$ 가 이등분할 때, a 의 값은?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ 1

해설



어두운 부분의 넓이가 10이고, 직선 $y = ax$로 이등분되므로
점 F의 좌표를 $(k, 2)$ 라 하면

사다리꼴 OABF의 넓이는 $\frac{1}{2}\{4 + (4 - k)\} \times 2 = 5$

$\therefore k = 3$ 따라서, 기울기는 $\frac{2}{3}$ 이다.