1. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 가 $A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid h(x) = 0\}$ 일 때, 명제 '$f(x) \neq 0$ 이고 $(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)$' 의 부정의 진리집합을 A, B, C 로 나타내면?

① $A^c \cap (B \cup C)^c$ ② $A^c \cap (B \cap C)^c$ ③ $A \cap (B \cup C)^c$
④ $A \cup (B \cup C)^c$ ⑤ $A \cup (B^c \cup C^c)$

해설

명제의 동치 관계를 이용해 보자.
$\sim [f(x) \neq 0$이고$(g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0)]$
$\leftrightarrow f(x) = 0$ 또는 $\sim [g(x) = 0$ 또는 $h(x) = 0]$
$\leftrightarrow f(x)$ 또는 $[g(x) \neq 0$ 이고 $h(x) \neq 0]$
$\leftrightarrow A \cup (B^c \cap C^c)$
$\leftrightarrow A \cup (B \cup C)^c$

2. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 두 조건 $p : x^2 = 3x$, $q : x \geq 2$ 에 대하여 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합은?

① $\{0\}$ ② $\{1\}$ ③ $\{3\}$ ④ $\{0, 1\}$ ⑤ $\{3, 5\}$

해설

p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면
$P = \{0, 3\}$, $Q = \{2, 3, 4, 5\}$
'p 이고 $\sim q$' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q^c$
$\therefore P \cap Q^c = P - Q = \{0\}$

3. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

4. 전체집합을 U , 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 할 때, 두 집합 $P,\ Q$ 는 $P \cap Q^c = \varnothing,\ Q^c \subset P$ 를 만족한다. 다음 중에서 참인 명제를 <u>모두</u> 고르면?

㉠ p 이면 $\sim q$ 이다.   ㉡ p 이면 q 이다.

㉢ $\sim q$ 이면 p 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$P \cap Q^c = \varnothing$에서 $Q^c \subset P$이므로
$P \cap Q^c = Q^c = \varnothing$
$\therefore\ Q = u$
㉠ $Q^c = \varnothing$이므로 $P \not\subset Q^c$이고
$p \to \sim q$는 거짓이다.
㉡ $Q = V$이므로 $P \subset Q$이고
$p \to q$는 참이다.
㉢ $Q^c = \varnothing$이고 $Q^c \subset P$이고
$\sim q \to \sim p$는 참이다.

5. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 8 가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

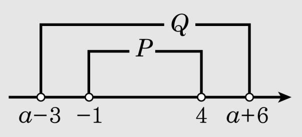
6. 실수 전체의 집합에서의 두 조건 $p : -1 < x < 4$, $q : a-3 < x < a+6$ 일 때, 명제 $p \to q$ 가 참이기 위한 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면 $P = \{x \mid -1 < x < 4\}$

$Q = \{x \mid a-3 < x < a+6\}$



이때, 명제 $p \to q$ 가 참이려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 위 수직선에서 $a-3 \le -1$ 이고 $a+6 \ge 4$ 이다.

$\therefore -2 \le a \le 2$

따라서, a 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 0 이다.

7. 다음 중 대우가 참인 것을 고르면?

① 평행사변형은 직사각형이다.

② 2 의 배수는 4 의 배수이다.

③ m, n 이 홀수이면 $m+n$ 은 홀수이다.

④ $x^2-9=0$ 이면 $x-3=0$ 이다.

⑤ $x \geq 2$ 이면 $x^2 \geq 4$ 이다.

해설

⑤ 최솟값 2 를 제곱하면 4 이므로 참이다.

8. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r에 대하여 다음 추론 중에서 옳은 것은?

① $p \Rightarrow \sim q$, $r \Rightarrow q$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

② $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

④ $q \Rightarrow p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

⑤ $q \Rightarrow \sim p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

해설

① $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
② $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
④ $\sim p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim p \Rightarrow r$
⑤ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

9. 우성, 동건, 정재는 전교 3등 안에 드는 학생들이다.

㉠ 우성 : 나는 전교 1등이 아니야 ㉡ 동건 : 나는 2등이 아니야. ㉢ 정재 : 나는 2등이야.

위의 주장 중 하나만 참이라 할 때, 전교1, 2, 3등을 차례대로 적으면?

① 동건, 정재, 우성
② 정재, 동건, 우성
③ 우성, 동건, 정재
④ 정재, 우성, 동건
⑤ 동건, 우성, 정재

해설

우성이의 주장이 참이라고 가정하면, 동건이와 정재의 주장은 거짓이 된다.
따라서, 우성-전교 1등이 아님, 동건-전교 2등, 정재-전교 2등이 아니다.
이상에서 우성이는 전교 1등이 아닌데, 동건이가 2등이므로 당연히 3등이 되고, 남은 정재가 전교 1등이 된다. 즉, 모순이 없으므로 정재, 동건, 우성이 각각 1, 2, 3 등이다.(동건의 주장이 참이라면 우성, 정재가 거짓이 되는데, 이 경우 정재가 2등이 되어 참을 말한 것이 되므로 모순이다. 또한, 정재가 참이라면 우성, 동건이 거짓이 되어야 하는데, 동건이가 참을 말한 결과가 되므로 모순이다.)

10. 「a, b가 정수일 때, ab 가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.」라는 명제를 다음과 같이 증명하려고 한다.

> 주어진 명제의 대우를 쓰면「a, b가 정수일 때, a, b가 모두 홀수이면 ab도 홀수이다.와 같다. 여기서 a, b 를 $a=2k+1$, $b=2l+1$ (단,k, l 은 정수) 로 놓으면 $ab=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1=2(2kl+k+l)+1$ k, l 은 정수이므로 $2kl+k+l$ 도 (㉠) 이다. 그러므로 ab 는 (㉡) 이다.
> 따라서, 주어진 명제의 대우가 (㉢) 이므로 주어진 명제도 (㉣) 이다.

이 때, ( ) 안에 알맞은 것을 ㉠, ㉡, ㉢ 순서대로 바르게 나타낸 것은?

① 짝수, 정수, 참
② 홀수, 홀수, 거짓
③ 정수, 홀수, 참
④ 홀수, 짝수, 거짓
⑤ 정수, 짝수, 참

해설

k, l이 정수일 때, $2kl+k+l$도 정수이다.
따라서, $ab=2(2kl+k+l)+1$은 홀수가 된다.
대우가 참이면 주어진 명제는 항상 참이다.

11. 다음 조건p 는 조건q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,a,b 는 실수)

(i) p : a,b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수
(ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

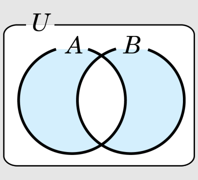
해설

12. 다음 중에서 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) = B\cap A^c$가 성립하기 위한 필요충분조건은 ?

① $A = B$　　② $B \subset A$　　③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$　　⑤ $A \cap B = B$

해설



$$
\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) &= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c \\
&= (A-B)\cup(B-A) \\
&= B\cap A^c \\
&= B-A
\end{aligned}
$$

$\therefore\ A - B = \phi$

그러므로 $A \subset B$

해설

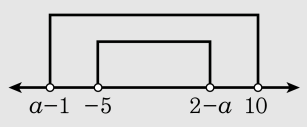
$(A-B)\cup(B-A) = B-A$ 에서$(A-B)$와$(B-A)$ 는 서로소이므로 등식이 성립하려면 $A-B=\varnothing$ 가 되어야 한다. $A-B=\varnothing \leftrightarrow A\subset B$

13. 다음 두 조건 $p : a-1 < x \le 10$, $q : -5 < x \le 2-a$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값으로 알맞지 <u>않은</u> 것은?

① -9　② -8　③ -7　④ -6　⑤ -5

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되기 위해서는
$\{x \mid -5 < x < 2-a\} \subset \{x \mid a-1 < x < 10\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서



$a-1 \le -5$, $2-a \le 10$

$\therefore\ -8 \le a \le -4$

14. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$　② $P \cap Q = Q$　③ $P \cap Q = P$

④ $P^c = Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \to \sim q$이고, 대우 $q \to p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

15. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a| + |b| \geq |a + b|$

② $a \geq b > 0$일 때 $\dfrac{b}{2+a} \geq \dfrac{a}{2+b}$

③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc(a > 0, b > 0, c > 0)$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} = \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)}$$

$$= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)}$$

$$= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)}$$ 에서

$(a+2)(b+2) > 0$이고

$(b-a) \leq 0,\ a+b+2 > 0$이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

16. 두 실수 a, b 에 대하여 $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 중 대소를 비교한 것으로 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$　　② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$　　④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 &= a + b + 2\sqrt{ab} - 1 \\ &= 2\sqrt{ab}\ (\because a + b = 1) > 0\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

17. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

18. 실수 a, b에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$임을 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$A = a^2 + b^2,\ B = -ab$
$A - B = a^2 + b^2 - (-ab)$
$= a^2 + b^2 + ab$
$= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$
$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$([가])$0$
따라서 $A - B \geq 0$이므로 A([나])B이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

① $>, \geq$ ② $\geq, \geq$ ③ $>, >$ ④ $<, \geq$ ⑤ $\leq, \leq$

해설

$A = a^2 + b^2,\ B = -ab$
$A - B = a^2 + b^2 - (-ab)$
$= a^2 + b^2 + ab$
$= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$
$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
($a,\ b$가 실수이므로)
$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

19. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 인 양수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $abc \le 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2, \quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다] 에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$ 이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$ 이고 $c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

20. 양수 x, y에 대하여 $\left(x+\frac{3}{y}\right)\left(3y+\frac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0$, $y>0$이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = 3xy+1+9+\frac{3}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{3xy\cdot\frac{3}{xy}}+10$$
$$= 2\cdot 3+10 = 16$$

21. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

> $\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}} \cdots$ ㉠
> $\therefore \ \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡
> $\therefore \ x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢
> 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots$ ㉣

① ㉠　② ㉡　③ ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ 에서 등호가 성립하는 경우는
$\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$, 즉 $y=4x$일 때이고,
㉢ 에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서, $x+y$의 최솟값은 8이 될 수가 없다.

22. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

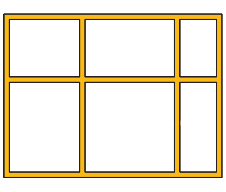
해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$

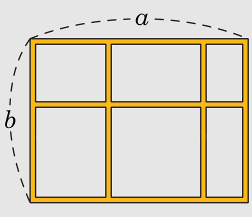
23. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$　② $(1200, 40)$　③ $(600, 30)$

④ $(1200, 30)$　⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because \ 3a + 4b = 240)$

$\therefore \ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240$,

$\therefore \ a = 40$

24. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$y=\frac{1}{4}(5-3x)$

$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$

$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$

$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$

$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$

25. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$