

1. 집합 $A = \{x \mid x = 7 \times n - 4, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \notin A$

② $4 \in A$

③ $7 \notin A$

④ $10 \notin A$

⑤ $17 \in A$

해설

$$A = \{3, 10, 17, \dots\}$$

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

④ $10 \in A$

2. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 100\}$, $B = \{x \mid x \text{는 한 자리의 자연수}\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 59

해설

$100 \div 2 = 50$ 이므로 $n(A) = 50$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 이므로 $n(B) = 9$
따라서 $n(A) + n(B) = 50 + 9 = 59$ 이다.

3. 세 집합 $A = \{x|x \text{는 } 21 \text{의 약수}\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{x|x \text{는 } 21 \text{ 이하의 자연수}\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낸 것으로 옳은 것을 골라라.

- ① $B \subset A = C$ ② $B \subset C \subset A$ ③ $B \subset A \subset C$
④ $A \subset B \subset C$ ⑤ $A = B \subset C$

해설

$A = \{1, 3, 7, 21\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, \dots, 20, 21\}$
 $\therefore B \subset A \subset C$

4. $(A - B) \cup (A \cap B)$ 를 간단히 하면?

- ① A ② B ③ A^c ④ B^c ⑤ $\emptyset$

해설

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (A \cap B) &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U = A\end{aligned}$$

5. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

- ① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = -3$
- ③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

- ① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
- ⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

6. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 에서 원소 0, 1 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분 집합의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2^{(4-2)} = 2^2 = 4$$

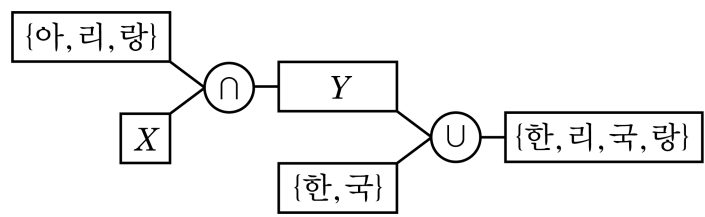
7. 다음 중 옳은 것은?

- ① $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 6, 7\} = \emptyset$
- ② $\{p, l, a, n, e\} \cap \{p, l, a, y\} = \{p, l\}$
- ③ $\{x|x \text{는 } 4\text{의 배수}\} \cap \{12, 14, 16, 18\} = \{12, 14, 16\}$
- ④ $\{x|x \text{는 } 5\text{로 나눴을 때 나머지가 } 1 \text{인 수}, 1 < x < 20\} \cap \{x|x \text{는 } 18\text{의 약수}\} = \{6\}$
- ⑤ $\{x|x \text{는 } 3\text{의 배수}\} \cap \{x|x \text{는 } 9\text{의 배수}\} = \{x|x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$

해설

- ⑤ $\{x|x \text{는 } \square\text{의 약수}\} \cap \{x|x \text{는 } \triangle\text{의 약수}\}$
 $= \{x|x \text{는 } \bigcirc\text{의 약수}\}$ 일 때,
 $\bigcirc$ 는 $\square, \triangle$ 의 최대 공약수이다.

8. 두 집합 X, Y 의 교집합과 합집합을 다음 그림과 같이 나타내기로 한다. 이때, 만족하는 집합 Y 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : {리, 랑}

해설

$Y \cup \{\text{한, 국}\} = \{\text{한, 리, 국, 랑}\}$ 이므로 $\{\text{리, 랑}\} \subset Y \subset \{\text{한, 리, 국, 랑}\}$ 이다.
또, $\{\text{아, 리, 랑}\} \cap X = Y$ 이므로 $Y \subset \{\text{아, 리, 랑}\}$ 이다.
따라서 $Y = \{\text{리, 랑}\}$ 이다.

9. 어느 반 학생 35명 중 피자를 좋아하는 학생이 19명, 떡볶이를 좋아하는 학생이 21명, 피자과 떡볶이 모두를 싫어하는 학생이 3명일 때, 둘 다 좋아하는 학생은 몇 명인가?

▶ 답: 명

▶ 정답 : 8 명

해설

전체 반 학생들의 집합을 U , 피자를 좋아하는 학생들의 집합을 A , 떡볶이를 좋아하는 학생들의 집합을 B 라고 하면,

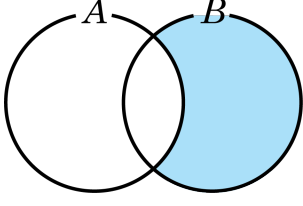
$$n(U) = 35, n(A) = 19, n(B) = 21$$

$$n((A \cup B)^c) = 3$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 35 - 3 = 32$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 19 + 21 - 32 = 8$$

10. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내지 않는 것을 모두 고르면?(정답 2 개)



- ① $B \cap A^c$
- ② $A \cap B^c$
- ③ $(A \cup B) - B$
- ④ $B - (A \cap B)$
- ⑤ $B - A$

해설

$B - A = B \cap A^c = B - (A \cap B) = (A \cup B) - A$ 이므로 색칠한 부분을 나타내지 않는 것은 ②, ③이다.

11. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$
- ② $P \cap Q = \phi$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $P \subset Q$
- ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q \Rightarrow P^c \subset Q^c \Rightarrow Q \subset P$

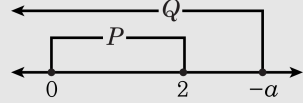
12. 실수 x 에 대한 두 조건 $p : 0 \leq x \leq 2$, $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x | x \leq -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$ 이라면 $2 \leq -a$, $a \leq -2$ 따라서 a 의 최댓값은 -2

13. 다음에서 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단, a, b 는 실수)

- $\supsetneq$ $p : A \cup B = B, q : A \subset B$
- $\subseteq$ $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = 0$ 이고 $b = 0$
- $\subsetneq$ $p : a^2 = b^2$ $q : a = b$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\subsetneq$

해설

$\subsetneq$ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건

14. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.
⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$$\begin{aligned} P - (P - Q) &= P - (P \cap Q^c) = P \cap (P \cap Q^c)^c \\ &= P \cap (P^c \cup Q) = (P \cap P^c) \cup (P \cap Q) = P \cap Q = P \end{aligned}$$

이므로 $P \subset Q$ 이고 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

15. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $n-1$ 과, n 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로

$2^{n-2} = 64 = 2^6$ 이다.

$\therefore n-2 = 6, n = 8$

16. 두 집합 $A = \{a-1, a+2, 8\}$, $B = \{3, 6, b\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$A = B$ 이므로
 $a-1=3$ 에서 $a=4$, $b=8$
 $\therefore a+b=12$

17. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 를 만족하는 자연수 $a_k (k = 1, 2, \dots, 5)$ 를 원소로 하는 집합 A 와 집합 $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 이고 $a_1 + a_4 = 10$ 이다. $A \cup B$ 의 원소의 합이 224 일 때, $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 142

해설

$A \cap B = \{a_1, a_4\}$ 에서 a_1, a_4 모두 제곱수이고, 두 수의 합이 10 이므로 $a_1 = 1, a_4 = 9$

9 가 집합 B 의 원소이므로 집합 A 의 원소 중에는 3 이 포함되고, 또 9 가 집합 A 의 원소이므로 집합 B 의 원소 중에는 81 이 포함 된다. 또, a_5 가 a_4 보다 크지만 a_5 가 10 보다 커지면 합집합이 224 보다 커지므로 a_5 는 10 이 되고, 차례로 대입하면 $a_3 = 4$ 가 된다.

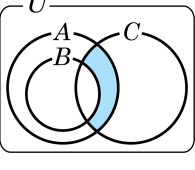
$$A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$$

$$B = \{1, 9, 16, 81, 100\}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = 3 + 4 + 10 + 9 + 16 + 100 = 142$$

18. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?

- ① $A - (B \cap C)$
- ② $(A - B) \cap C$
- ③ $(A \cup B) - C$
- ④ $(A \cup C) - B$
- ⑤ $(A \cap B) \cup C$



해설

①

③

④

⑤

19. 지성은 자기 반 학생 35명의 키와 몸무게를 조사하여 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’ 라는 결론을 내렸다. 다음 <보기> 중 지성의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 할 것을 모두 고르면?

- ㉠

키가 180cm인 학생의 몸무게
- ㉡

키가 170cm인 학생의 몸무게
- ㉢

몸무게가 70kg인 학생의 키
- ㉤

몸무게가 60kg인 학생의 키

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉠, ㉢
- ③ ㉠, ㉤
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉡, ㉤

해설

지성의 결론 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’가 참이면 키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65kg 이상이어야 하므로 키가 180cm인 학생의 몸무게가 65kg 이상인지 반드시 확인해야 한다. 또한, 지성의 결론이 참이면 결론의 대우 ‘몸무게가 65kg 미만인 학생의 키는 175cm 미만이다.’도 참이므로, 몸무게가 60kg인 학생의 키가 175cm 미만인지 확인해야 한다.
∴ ㉠, ㉤

20. $a > 1$ 일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$ 이라 한다. a, b, c 의
대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$

② $a > c > b$

③ $b > c > a$

④ $b > a > c$

⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$$

$$\text{그런데, } a > 1 \text{ 이므로 } \frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore b < a$$

$$\text{또, } b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \quad \left(\because a \neq \frac{1}{a}\right)$$

$$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$$

$$\therefore c < b$$

$$\therefore a > b > c$$

21. 두 집합 $A = \left\{ \left\lceil \frac{9}{5}k \right\rceil \mid k \text{는 } 1 \leq k \leq a \text{인 정수} \right\}$ $B = \left\{ \left\lceil \frac{9}{4}k \right\rceil \mid k \text{는 } 1 \leq k \leq b \text{인 정수} \right\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 인 정수 a, b 의 최솟값의 합은?
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$k = 1, 2, 3, \dots$ 일 때,
 각각의 $\left\lceil \frac{9}{5}k \right\rceil$ 와 $\left\lceil \frac{9}{4}k \right\rceil$ 의 값을 알아보면,
 $\left\lceil \frac{9}{5}k \right\rceil : 1, 3, 5, 7, 9, 10 \dots$
 $\left\lceil \frac{9}{4}k \right\rceil : 2, 4, 6, 9, 11, \dots$
 $A \cap B \neq \emptyset$ 이 되려면 $a \geq 5, b \geq 4$
 a, b 의 최솟값의 합은 9

22. 두 사람 갑, 을이 같은 거리를 여행하는데, 갑은 거리의 반을 a 의 속력으로, 나머지 거리를 b 의 속력으로 가고, 을은 총 걸린 시간 중 반을 a 의 속력으로, 나머지 시간을 b 의 속력으로 갔다. 각각의 평균속력을 A, B라 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① A ≤ B ② A ≥ B ③ A = B
- ④ A < B ⑤ A > B

해설

거리를 l 이라 하고, 갑이 걸린 시간을 t_1 이라 하면

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{b}$$

따라서 A의 평균속력은

$$A = \frac{l}{t_1} = \frac{l}{\frac{l}{2a} + \frac{l}{2b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

또, 을의 평균속력은 $B = \frac{1}{2}(a+b)$

그런데, $\frac{1}{2}(a+b) \geq \frac{2ab}{a+b}$ 이므로

$B \geq A$

23. a, b 는 양의 상수이다. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1, x > 0, y > 0$ 일 때, $x + y$ 의
최솟값은?

① $2\sqrt{ab}$

② $4\sqrt{ab}$

③ $a + b + 2\sqrt{ab}$

④ $a + b + 4\sqrt{ab}$

⑤ $ab + 3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균) 이므로

$$(x+y) \cdot 1 = (x+y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right)$$

$$= a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq a + b + 2\sqrt{\frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y}}$$

$$= a + b + 2\sqrt{ab}$$

24. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
 $1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$
이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
 $ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.
 $\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$
곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① $abc, a = b = c = 1$
- ② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$
- ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$
- ④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$
- ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, ab + bc + ca \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3 = 8$ 에서
 $a = b = c = 1$

25. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 과 $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β , $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을 γ, σ 라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,
 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 를 만족한다.
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b, \gamma + \sigma = b,$
 $\gamma\sigma = a(a, b > 0)$
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{9(\gamma + \sigma)}{\gamma\sigma}$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 6$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} \geq 6$$