1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(a)$를 잇는 선분 AB에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$를 만족시키는 a의 값들의 합은?

① -6 ② -5 ③ 3 ④ 5 ⑤ 6

해설

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(a)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}} = |a-(-3)|$ 이므로
$|a+3| = 5$
$a+3=5$ 또는 $a+3=-5$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-8$
따라서 a의 값들의 합은 -6 이다.

2. 수직선 위의 점 A (-2) , B (-1) , C (5) 가 있을 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 를 구하면?

① $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=5$
② $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=5$
③ $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=6$
④ $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=6$
⑤ $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$

해설

$\overline{AB}=-1-(-2)=1$
$\overline{BC}=5-(-1)=6$

3. 두 점 A(1, 2), B(−2, 6) 사이의 거리는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-6)^2} \\ &= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

4. 두 점 $(8, 5)$, $(3, -7)$ 사이의 거리를 구하면?

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

해설
$\sqrt{(3-8)^2+(-7-5)^2} = \sqrt{169} = 13$

5. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$\mathrm{A}(\sqrt{3}-1, 1-\sqrt{2}),\ \mathrm{B}(\sqrt{3}, 1+\sqrt{2})$

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$

$= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{1+8} = 3$

6. 두 점 $A(1, 4)$, $B(3, 2)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 x좌표를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

점 P의 좌표를 $(x\ , 0)$이라 하면,
$(\because\ x$축 위의 점은 $y = 0)$
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(x-1)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2^2}$
양변을 제곱하여 x 의 값을 구하면
$x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 6x + 9 + 4 \therefore\ x = -1$
그러므로 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0)$

7. 두 점 $\mathrm{A}(-5,-1)$, $\mathrm{B}(4,-5)$에서 같은 거리에 있는 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{15}{26},\frac{15}{26}\right)$ ② $\left(\frac{13}{26},-\frac{13}{26}\right)$ ③ $\left(\frac{13}{26},-\frac{15}{26}\right)$
④ $\left(\frac{15}{26},-\frac{13}{26}\right)$ ⑤ $\left(\frac{15}{26},-\frac{15}{26}\right)$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a)$ 라 하면, $(\because\ y=-x)$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(a+5)^2+(-a+1)^2=(a-4)^2+(-a+5)^2$

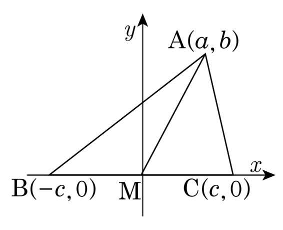
$a^2+10a+25+a^2-2a+1$

$=a^2-8a+16+a^2-10a+25$

$\Rightarrow\ 26a=15 \Rightarrow\ a=\frac{15}{26}$

$\therefore \mathrm{P}(a,-a)=\left(\frac{15}{26},-\frac{15}{26}\right)$

8. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> $A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 라 하면
> $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=$(나)
> $\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=$(다)$(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

위의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

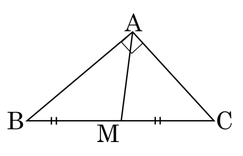
해설

$A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$ 이므로
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

9. 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right)$
$= \overline{BC}^2$

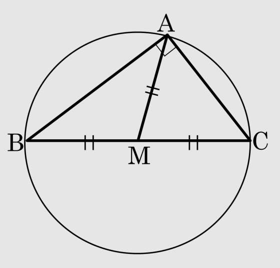
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 3, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$　② 4, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
③ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$　④ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$



이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right)$$
$$= \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

10. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$, $\mathrm{B}(3,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2\ :\ 3$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 $2:3$으로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① $-\dfrac{134}{5}$　② $-\dfrac{116}{5}$　③ $\dfrac{134}{5}$　④ $\dfrac{116}{5}$　⑤ 20

해설

$$\mathrm{P}(a,\ b)=\left(\frac{2\times3+3\times1}{2+3},\ \frac{2\times7+3\times(-3)}{2+3}\right)$$
$$=\left(\frac{9}{5},\ 1\right)$$
$$\mathrm{Q}(c,\ d)=\left(\frac{2\times3-3\times1}{2-3},\ \frac{2\times7-3\times(-3)}{2-3}\right)$$
$$=(-3,\ -23)$$
$$\therefore\ a+b+c+d=\frac{9}{5}+1-3-23$$
$$=-\frac{116}{5}$$

11. 세 점 $A(2,\ 4), B(-2, 0), C(3, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

① $(0, 1)$ ② $(1, 1)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 1)$ ⑤ $(0, 1)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{2+(-2)+3}{3},\ \frac{4+0+2}{3}\right) = (1, 2)$$

12. 세 점 A$(1,\ -1)$, B$(2,\ 1)$, C$(3,\ 3)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(2,\ 1)$ ③ $(3,\ 1)$
④ $(0,\ 1)$ ⑤ $(2,\ 2)$

해설

무게중심 G$\left(\frac{1+2+3}{3},\ \frac{-1+1+3}{3}\right) = (2,\ 1)$

13. 세 점 $A(3,\ 4)$, $B(-2,\ -2)$, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $\left(2,\ \frac{2}{3}\right)$일 때, 점 C의 좌표는?

① $(5,\ 0)$ ② $(-5,\ 1)$ ③ $(5,\ 1)$
④ $(6,\ 0)$ ⑤ $(-6,\ 1)$

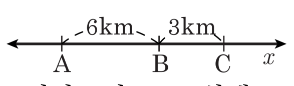
해설

$C(a,\ b)$라 하면

$\left(2,\ \frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3-2+a}{3},\ \frac{4-2+b}{3}\right)$

$\therefore (a,\ b)=(5,\ 0)$

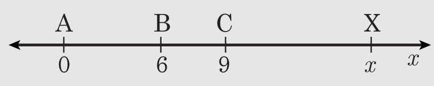
14. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



① 6 km ② 9 km ③ 12 km
④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0| = 2|x-9|$
곧, $|x| = 2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$
$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12$(km)

15. 두 점 $A(4,-3), B(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $A(4,-3), B(a,3)$ 에 대하여

$\overline{AB} = \sqrt{(a-4)^2+(3+3)^2}$

$= \sqrt{a^2-8a+52}$

$= 6\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2-8a+52=72$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

$\therefore a=10(\because a>0)$

16. 세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(4,3)$, $\mathrm{C}(a,0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(a-2)^2+1^2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(a-4)^2+3^2}$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$

$(a-2)^2+1=(a-4)^2+9$

$4a=20$

$\therefore\ a=5$

17. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3),\ \mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$
$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$
양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$
$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0\ ,\ (a-2)^2 = 0$
$\therefore\ a = 2$

18. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$　② $(1,\ 0)$　③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$　⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면
$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$
$14x = 28$
따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

19. 두 점 $\mathrm{A}(-1,4), \mathrm{B}(6,3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$ 라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a,0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore\ \mathrm{P}=(2,0)$
$a+b=2$

20. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$　　② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$
③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$　　④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$
⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$ 과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$
양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ P(3.6,\ 0)$
$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$
양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6\ \therefore\ Q(0,\ 6)$

21. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle \mathrm{ABC}$가 $\angle \mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle \mathrm{ABC}$에서 $\angle \mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

22. 두 점 $A(-1,\ -2), B(2,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점을 P, $1 : 2$ 로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

내분점, 외분점 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{1\times2+2\times(-1)}{3}, \frac{1\times4+2\times(-2)}{3}\right) = (0, 0)$$

$$Q = \left(\frac{1\times2-2\times(-1)}{1-2}, \frac{1\times4-2\times(-2)}{1-2}\right) = (-4, -8)$$

$$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{4^2+8^2} = 4\sqrt{5}$$

23. x 축 위의 두 점 A$(-4,\ 0)$, B$(12,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $5\ :\ 3$ 으로 내분하는 점을 P, $3\ :\ 7$ 로 외분하는 점을 Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점의 좌표는?

① $(-5,\ 0)$ ② $(-4,\ 0)$ ③ $(5,\ 0)$
④ $(4,\ 0)$ ⑤ $(-1,\ 0)$

해설

그림에서 내분점 P$(x,\ y)$ 는

$x = \dfrac{60-12}{5+3} = 6,\quad y = \dfrac{0+0}{5+3} = 0$

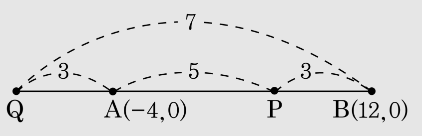
$\therefore$ P$(6,\ 0)$

외분점 Q$(x,\ y)$ 는

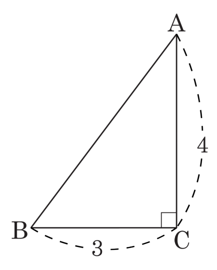
$x = \dfrac{36+28}{3-7} = \dfrac{64}{-4} = -16,\ y = 0$

$\therefore$ Q$(-16,\ 0)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 M$\left(\dfrac{6-16}{2},\ 0\right) = (-5,\ 0)$



24. 다음 그림과 같이 $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 4$ 인 직각삼각형이 있다. 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점을 P, $3:2$로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2$ 의 값은?



① 125 ② 200 ③ 250

④ 325 ⑤ 450

해설

점 C를 원점으로 잡으면 점 A, B의 좌표는
각각 A$(0,4)$, B$(-3,0)$이다.
따라서 선분 AB를 $2:3$으로
외분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times(-3)-3\times0}{2-3}, \frac{2\times0-3\times4}{2-3}\right)$$

$= \mathrm{P}(6,12)$

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3\times(-3)-2\times0}{3-2}, \frac{3\times0-2\times4}{3-2}\right)$$

$= \mathrm{Q}(-9,\ -8)$

$$\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 = (6^2 + 12^2) + (9^2 + 8^2)$$
$$= 325$$

25. 평행사변형 ABCD 에서 꼭짓점 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}(6,\ 4)$, $\mathrm{D}(0,\ 2)$ 이고, $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 $\overline{\mathrm{BC}}$ 가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C 의 좌표는?

① $\mathrm{C}(5,\ 0)$ ② $\mathrm{C}(0,\ 5)$ ③ $\mathrm{C}(7,\ 8)$

④ $\mathrm{C}(8,\ 7)$ ⑤ $\mathrm{C}(7,\ 6)$

해설

$\mathrm{C}(a,b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)=\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ -2+b=6$

$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ \mathrm{C}(7,8)$

26. 세 점 A $(-1,1)$, B $(-3,-2)$, C $(2,-1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4,2)$ ② $(2,4)$ ③ $(3,5)$
④ $(5,3)$ ⑤ $(1,-5)$

해설

D (a,b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$의 중점과 $\overline{BC}$의 중점은 일치한다.

$\therefore \left(\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{a-3}{2},\frac{b-2}{2}\right)$

$\therefore a=4, b=2$

27. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A(4, 6), B(−2, 2)이고, 무게중심이 G(1, 3)일 때 꼭짓점 C의 좌표는?

① (−1, 1) ② (1, −1) ③ (1, 1)
④ (−1, −1) ⑤ (1, 2)

해설
무게중심 구하는 공식을 이용한다.
점 C$(x,\ y)$라 하면,
$$\mathrm{G}=\left(\frac{4-2+x}{3},\ \frac{6+2+y}{3}\right)=(1,\ 3)$$
$\therefore\ x=1,\ \ y=1$

28. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(5, b)$인 $\triangle\mathrm{ABC}$의 세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 외분하는 점을 각각 $\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$라 하자. $\triangle\mathrm{DEF}$의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

세 변 $\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CA}$를 $2:1$로 외분하는 점

D, E, F의 좌표를 각각 구하면

$$\mathrm{D}\left(\frac{2\times(-1)-1\times \mathrm{a}}{2-1}, \frac{2\times 0-1\times 2}{2-1}\right)$$

$$=\mathrm{D}(-\mathrm{a}-2, -2)$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{2\times 5-1\times(-1)}{2-1}, \frac{2\times \mathrm{b}-1\times 0}{2-1}\right)$$

$$=\mathrm{E}(11, 2\mathrm{b})$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{2\times \mathrm{a}-1\times 5}{2-1}, \frac{2\times 2-1\times \mathrm{b}}{2-1}\right)$$

$=\mathrm{F}(2\mathrm{a}-5, 4-\mathrm{b})$이므로

$\triangle\mathrm{DEF}$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-a-2+11+2a-5}{3}, \frac{-2+2b+4-b}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$$

이때, $\triangle\mathrm{DEF}$의 무게중심의 좌표가

$(2, 1)$이므로

$$\frac{a+4}{3}=2\ ,\ \frac{b+2}{3}=1$$

$\therefore a=2, b=1 \ \therefore a+b=3$

(다른 풀이) 일반적으로 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심과

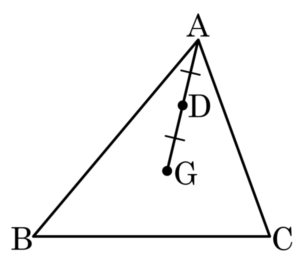
$\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CA}}$를 $m:n$으로 외분하는 점

(내분하는 점)을 이은 삼각형의 무게중심은 일치한다.

즉, $\left(\frac{a-1+5}{3}, \frac{2+0+b}{3}\right)=(2, 1)$

$\therefore a=2, b=1$

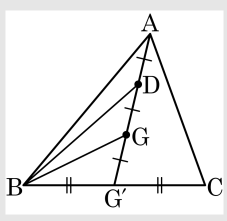
29. 다음 그림과 같이 $\triangle \mathrm{ABC}$ 에서 점 G는 $\triangle \mathrm{ABC}$ 의 무게중심이고 점 D는 $\overline{\mathrm{AG}}$ 의 중점일 때, $\dfrac{\triangle \mathrm{DBG}}{\triangle \mathrm{ABC}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{AG}}$ 의 연장선이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 와 만난 점을 G′ 이라고 하면



$\overline{\mathrm{BG}'} = \overline{\mathrm{G'C}}$ 에서

$\triangle \mathrm{ABG}' = \frac{1}{2}\triangle \mathrm{ABC}$

$\overline{\mathrm{DG}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{AG}'}$ 이므로

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{DBG} &= \frac{1}{3}\triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle \mathrm{ABC} \\ &= \frac{1}{6}\triangle \mathrm{ABC}\end{aligned}$$

$\therefore\ \dfrac{\triangle \mathrm{DBG}}{\triangle \mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{6}$

30. 세 점 $A(2, 1), B(1, 3), C(2, 0)$에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 3 = 0$ ③ $x - 3y - 2 = 0$
④ $x - 4y + 5 = 0$ ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$에서

$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

31. 세 점 $\mathrm{A}(-1,-4)$, $\mathrm{B}(3,-3)$, $\mathrm{C}(7,1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $\mathrm{P}(x,y)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2 \\
&=\{(x+1)^2+(y+4)^2\} \\
&+\{(x-3)^2+(y+3)^2\} \\
&+\{(x-7)^2+(y-1)^2\} \\
&=x^2+2x+1+y^2+8y+16+x^2-6x+9 \\
&+y^2+6y+9+x^2-14x+49+y^2-2y+1 \\
&=3x^2-18x+3y^2+12y+85 \\
&=3(x^2-6x+9)+3(y^2+4y+4)+46 \\
&=3(x-3)^2+3(y+2)^2+46
\end{aligned}$$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

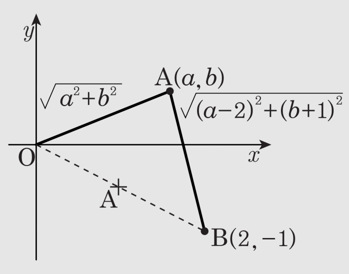
$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

32. 좌표평면 위에 점 O(0, 0), A(a, b), B(2, −1) 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ $\sqrt{5}$　　④ 3　　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고, $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때 최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}$



33. 좌표평면에서 세 점 $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(6,\ 0)$에 대하여 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① $(2, -1)$ ② $(2, -2)$ ③ $(2, -3)$
④ $(-2, 3)$ ⑤ $(-2, -3)$

해설

$\overline{AB}$의 기울기 : $\frac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\Rightarrow$ 수직이등분선 : $y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$, 중심은 $(4,\ 1)$ $\Rightarrow$ 수직이등분선: $y = 2(x-4) + 1$

두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2,\ y = -3$

$\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

$\therefore$ $(2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

$O(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AO} = \overline{CO}$에서 $(x+1)^2+(y-1)^2 = (x-6)^2+y^2$, $7x-y = 17$ ⋯㉠

$\overline{BO} = \overline{CO}$에서 $(x-2)^2+(y-2)^2 = (x-6)^2+y^2$, $2x-y = 7$ ⋯㉡

㉠ ㉡에서 교점의 좌표는 $(2,\ -3)$

34. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, -3)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 외심의 좌표는?

① O$\left(\frac{5}{8}, 0\right)$　② O$\left(\frac{8}{5}, 0\right)$　③ O$\left(0, \frac{5}{8}\right)$
④ O$\left(0, \frac{8}{5}\right)$　⑤ O(0, 0)

해설

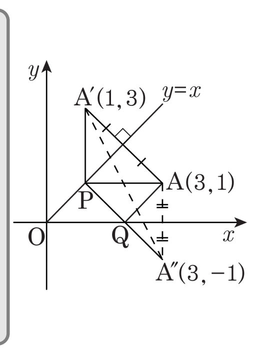
두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 O$\left(\frac{8}{5}, 0\right)$이다.

35. 정점 A$(3, 1)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}}$의 최소 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$　② 4　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A의 $y = x$에 대한 대칭점을 A′
점 A의 x축에 대한 A′라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA''}} \geq \overline{\mathrm{A'A''}}$
$\overline{\mathrm{A'A''}} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.



36. $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(1, 4) 이고, 세 변 $\overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{CA}}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b),$(3, 4)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{CA}}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.
따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로
$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

37. 세 점 A$(-2,\ 0)$, B$(-1,\ \sqrt{3})$, C$(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle$ABD 와 $\triangle$ACD 의 넓이의 비는?

① 1 : 2　② 1 : 3　③ 1 : 4　④ 2 : 3　⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle$A 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$
$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$