

1. 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(a)$ 를 잇는 선분 AB 에 대하여 $\overline{AB} = 5$ 를 만족시키는 a 의 값들의 합은?

① -6

② -5

③ 3

④ 5

⑤ 6

해설

수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(a)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = |a - (-3)| \text{ 이므로}$$

$$|a + 3| = 5$$

$$a + 3 = 5 \text{ 또는 } a + 3 = -5$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -8$$

따라서 a 의 값들의 합은 -6 이다.

2. 수직선 위의 점 A (-2) , B (-1) , C (5)가 있을 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 를 구하면?

① $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 5$

② $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 5$

③ $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 6$

④ $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 6$

⑤ $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$

해설

$$\overline{AB} = -1 - (-2) = 1$$

$$\overline{BC} = 5 - (-1) = 6$$

3. 두 점 A(1, 2), B(-2, 6) 사이의 거리는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + (2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

4. 두 점 $(8, 5)$, $(3, -7)$ 사이의 거리를 구하면?

①

13

②

14

③

15

④

16

⑤

17

해설

$$\sqrt{(3-8)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

5. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$$A(\sqrt{3}-1, 1-\sqrt{2}), B(\sqrt{3}, 1+\sqrt{2})$$

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$\overline{AB}$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2 + (1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{1+8} = 3$$

6. 두 점 $A(1, 4)$, $B(3, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 x 좌표를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

점 P 의 좌표를 $(x, 0)$ 이라 하면,

($\because$ x 축 위의 점은 $y = 0$)

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2^2}$$

양변을 제곱하여 x 의 값을 구하면

$$x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 6x + 9 + 4 \therefore x = -1$$

그러므로 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0)$

7. 두 점 $A(-5, -1)$, $B(4, -5)$ 에서 같은 거리에 있는 $y = -x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{15}{26}, \frac{15}{26}\right)$

② $\left(\frac{13}{26}, -\frac{13}{26}\right)$

③ $\left(\frac{13}{26}, -\frac{15}{26}\right)$

④ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{13}{26}\right)$

⑤ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{15}{26}\right)$

해설

구하는 점을 $P(a, -a)$ 라 하면, ($\because y = -x$)

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(a+5)^2 + (-a+1)^2 = (a-4)^2 + (-a+5)^2$$

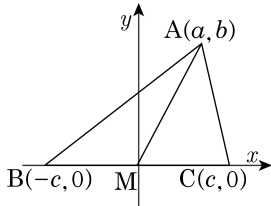
$$a^2 + 10a + 25 + a^2 - 2a + 1$$

$$= a^2 - 8a + 16 + a^2 - 10a + 25$$

$$\Rightarrow 26a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{26}$$

$$\therefore P(a, -a) = \left(\frac{15}{26}, -\frac{15}{26}\right)$$

8. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a+c)^2 + b^2 + (a-c)^2 + b^2 = (\text{가}) \text{ 이고,}$$

$$\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$$

따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = (\text{나})$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (\text{다})(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

위

의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
- ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
- ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
- ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
- ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= \{(-c-a)^2 + (0-b)^2\} + \{(c-a)^2 + (0-b)^2\}$$

$$= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$$

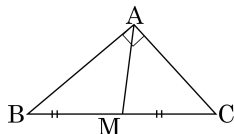
$$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

9. 다음은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{가} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{나}^2 \right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$$\boxed{나} = \boxed{다} \overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \boxed{가} \left(\boxed{라} \overline{BC}^2 \right) \\ &= \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

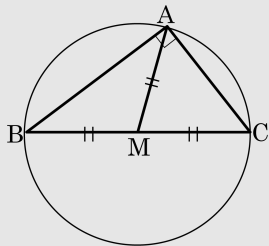
- ① 3, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 4, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
 ③ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ ④ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
 ⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{AM}^2 \right)$$

이 때, $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \text{ 이므로 } \boxed{AM} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2 \left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4} \right) \\ &= \boxed{2} \left(\boxed{\frac{1}{2}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

10. 두 점 $A(1, -3)$, $B(3, 7)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $2 : 3$ 으로 내분하는 점 $P(a, b)$ 와 $2 : 3$ 으로 외분하는 점 $Q(c, d)$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은?

① $-\frac{134}{5}$

② $-\frac{116}{5}$

③ $\frac{134}{5}$

④ $\frac{116}{5}$

⑤ 20

해설

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \left(\frac{2 \times 3 + 3 \times 1}{2 + 3}, \frac{2 \times 7 + 3 \times (-3)}{2 + 3} \right) \\ &= \left(\frac{9}{5}, 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(c, d) &= \left(\frac{2 \times 3 - 3 \times 1}{2 - 3}, \frac{2 \times 7 - 3 \times (-3)}{2 - 3} \right) \\ &= (-3, -23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a + b + c + d &= \frac{9}{5} + 1 - 3 - 23 \\ &= -\frac{116}{5} \end{aligned}$$

11. 세 점 $A(2, 4), B(-2, 0), C(3, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

- ① $(0, 1)$ ② $(1, 1)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 1)$ ⑤ $(0, 1)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{2 + (-2) + 3}{3}, \frac{4 + 0 + 2}{3} \right) = (1, 2)$$

12. 세 점 $A(1, -1)$, $B(2, 1)$, $C(3, 3)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게 중심의 좌표는?

① $(1, 1)$

② $(2, 1)$

③ $(3, 1)$

④ $(0, 1)$

⑤ $(2, 2)$

해설

$$\text{무게중심 } G \left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{-1+1+3}{3} \right) = (2, 1)$$

13. 세 점 $A(3, 4)$, $B(-2, -2)$, C 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표가 $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ 일 때, 점 C 의 좌표는?

① $(5, 0)$

② $(-5, 1)$

③ $(5, 1)$

④ $(6, 0)$

⑤ $(-6, 1)$

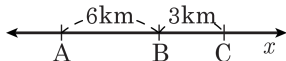
해설

$C(a, b)$ 라 하면

$$\left(2, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3 - 2 + a}{3}, \frac{4 - 2 + b}{3}\right)$$

$$\therefore (a, b) = (5, 0)$$

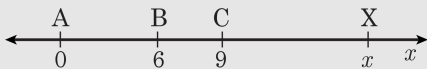
14. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



- ① 6 km ② 9 km ③ 12 km
④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A 마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)

A 마을과 X 마을 사이의 거리는

C 마을과 X 마을 사이의 거리의 2 배이므로

$$|x - 0| = 2|x - 9|$$

$$\text{곧, } |x| = 2|x - 9|$$

$$\therefore 2(x - 9) = \pm x$$

$$\therefore x = 6 \text{ 또는 } x = 18$$

여기서 $x = 6$ 이면 $X = B$ 가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $x = 18$

이 때, X 마을과 B 마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12(\text{km})$

15. 두 점 $A(4, -3), B(a, 3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

두 점 $A(4, -3), B(a, 3)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

16. 세 점 $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(a, 0)$ 에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-2)^2 + 1^2}, \overline{BC} = \sqrt{(a-4)^2 + 3^2}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(a-2)^2 + 1 = (a-4)^2 + 9$$

$$4a = 20$$

$$\therefore a = 5$$

17. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

18. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(-3, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(2, 0)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(5, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $P(x, 0)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x + 3)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 4)^2 + (0 - 5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2, 0)$

19. 두 점 $A(-1, 4), B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$P = (a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9, a = 2$$

$$\therefore P = (2, 0)$$

$$a + b = 2$$

20. 두 점 $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 와 y 축 위의 점 Q 의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0, 6)$

② $P(3.6, 0)$, $Q(-1, 6)$

③ $P(3.6, 0)$, $Q(0, 6)$

④ $P(2.4, 0)$, $Q(0, 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1, 2)$

해설

$A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 $P(x, 0)$ 과 $Q(0, y)$ 를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2 + 2^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \therefore P(3.6, 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{1^2 + (y-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore Q(0, 6)$

21. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{7}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{7} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

22. 두 점 $A(-1, -2), B(2, 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 1 : 2 로 내분하는 점을 P, 1 : 2 로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

내분점, 외분점 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{1 \times 2 + 2 \times (-1)}{3}, \frac{1 \times 4 + 2 \times (-2)}{3} \right) = (0, 0)$$

$$Q = \left(\frac{1 \times 2 - 2 \times (-1)}{1 - 2}, \frac{1 \times 4 - 2 \times (-2)}{1 - 2} \right) = (-4, -8)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

23. x 축 위의 두 점 $A(-4, 0)$, $B(12, 0)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 5 : 3 으로 내분하는 점을 P , 3 : 7 로 외분하는 점을 Q 라 할 때, $\overline{PQ}$ 의 중점의 좌표는?

① $(-5, 0)$

② $(-4, 0)$

③ $(5, 0)$

④ $(4, 0)$

⑤ $(-1, 0)$

해설

그림에서 내분점 $P(x, y)$ 는

$$x = \frac{60 - 12}{5 + 3} = 6, \quad y = \frac{0 + 0}{5 + 3} = 0$$

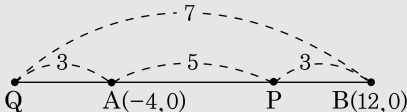
$$\therefore P(6, 0)$$

외분점 $Q(x, y)$ 는

$$x = \frac{36 + 28}{3 - 7} = \frac{64}{-4} = -16, \quad y = 0$$

$$\therefore Q(-16, 0)$$

$$\therefore \overline{PQ} \text{의 중점 } M\left(\frac{6 - 16}{2}, 0\right) = (-5, 0)$$



24. 다음 그림과 같이 $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 4$ 인 직각 삼각형이 있다. 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점을 P, 3 : 2로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2$ 의 값은?

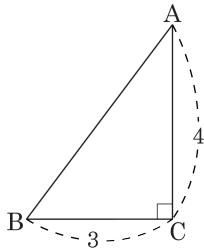
① 125

② 200

③ 250

④ 325

⑤ 450



해설

점 C를 원점으로 잡으면 점 A, B의 좌표는 각각 A(0, 4), B(-3, 0)이다.

따라서 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2 \times (-3) - 3 \times 0}{2 - 3}, \frac{2 \times 0 - 3 \times 4}{2 - 3}\right)$$

$$= P(6, 12)$$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{3 \times (-3) - 2 \times 0}{3 - 2}, \frac{3 \times 0 - 2 \times 4}{3 - 2}\right)$$

$$= Q(-9, -8)$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 &= (6^2 + 12^2) + (9^2 + 8^2) \\ &= 325\end{aligned}$$

25. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(-1, -2), B(6, 4), D(0, 2) 이고, $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① C(5, 0)

② C(0, 5)

③ C(7, 8)

④ C(8, 7)

⑤ C(7, 6)

해설

C(a, b) 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-2+b}{2} \right) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+2}{2} \right)$$

$$-1+a=6, \quad -2+b=6$$

$$\therefore a=7, \quad b=8$$

$$\therefore C(7, 8)$$

26. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$ 에 대하여 사각형 ABCD 가 평행사변형이 되도록 D 의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$

② $(2, 4)$

③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$

⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b) 라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$ 의 중점과 $\overline{BC}$ 의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a = 4, b = 2$$

27. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$ 이고, 무게중심이 $G(1, 3)$ 일 때 꼭짓점 C 의 좌표는?

① $(-1, 1)$

② $(1, -1)$

③ $(1, 1)$

④ $(-1, -1)$

⑤ $(1, 2)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

점 $C(x, y)$ 라 하면,

$$G = \left(\frac{4 - 2 + x}{3}, \frac{6 + 2 + y}{3} \right) = (1, 3)$$

$$\therefore x = 1, y = 1$$

28. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 2)$, $B(-1, 0)$, $C(5, b)$ 인 $\triangle ABC$ 의 세 변 AB , BC , CA 를 2 : 1로 외분하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$ 이 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1로 외분하는 점

D, E, F 의 좌표를 각각 구하면

$$D\left(\frac{2 \times (-1) - 1 \times a}{2 - 1}, \frac{2 \times 0 - 1 \times 2}{2 - 1}\right)$$

$$= D(-a - 2, -2)$$

$$E\left(\frac{2 \times 5 - 1 \times (-1)}{2 - 1}, \frac{2 \times b - 1 \times 0}{2 - 1}\right)$$

$$= E(11, 2b)$$

$$F\left(\frac{2 \times a - 1 \times 5}{2 - 1}, \frac{2 \times 2 - 1 \times b}{2 - 1}\right)$$

$$= F(2a - 5, 4 - b) \text{ 이므로}$$

$\triangle DEF$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-a - 2 + 11 + 2a - 5}{3}, \frac{-2 + 2b + 4 - b}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{a + 4}{3}, \frac{b + 2}{3}\right)$$

이때, $\triangle DEF$ 의 무게중심의 좌표가

$(2, 1)$ 이므로

$$\frac{a + 4}{3} = 2, \frac{b + 2}{3} = 1$$

$$\therefore a = 2, b = 1 \therefore a + b = 3$$

(다른 풀이) 일반적으로 $\triangle ABC$ 의 무게중심과

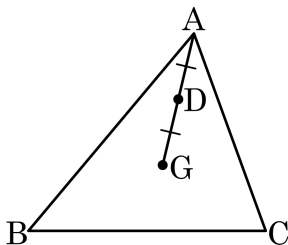
$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 를 $m : n$ 으로 외분하는 점

(내분하는 점)을 이은 삼각형의 무게중심은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{a - 1 + 5}{3}, \frac{2 + 0 + b}{3}\right) = (2, 1)$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

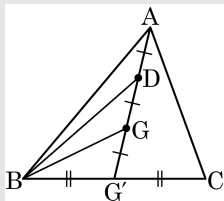
29. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이고 점 D는 $\overline{AG}$ 의 중점일 때, $\frac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$ 와 만난 점을 G' 이라고 하면



$$\overline{BG'} = \overline{G'C} \text{에서}$$

$$\triangle ABG' = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

$$\overline{DG} = \frac{1}{3} \overline{AG'} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle DBG &= \frac{1}{3} \triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{6} \triangle ABC \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \frac{1}{6}$$

30. 세 점 A(2,1), B(1,3), C(2,0)에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$

② $x + 2y + 3 = 0$

③ $x - 3y - 2 = 0$

④ $x - 4y + 5 = 0$

⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}2(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 &= \\ 3(x^2 - 4x + y^2 + 4)\end{aligned}$$

$$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$$

$$2x - 10y + 8 = 0$$

$$\therefore x - 5y + 4 = 0$$

31. 세 점 $A(-1, -4)$, $B(3, -3)$, $C(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

①

46

② 45

③ 44

④ 43

⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x, y)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\} \\ &+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\} \\ &+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\} \\ &= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9 \\ &+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 \\ &= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85 \\ &= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46 \\ &= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46 \\ &\text{따라서 } x = 3, y = -2 \text{ 일 때,} \\ &\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \text{ 의 최솟값은 } 46 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

32. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때,
 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1

② 2

③ $\sqrt{5}$

④ 3

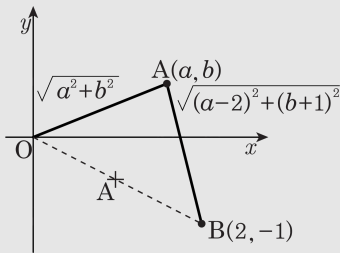
⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$
 의 길이이다.

따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)

따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



33. 좌표평면에서 세 점 A(-1, 1), B(2, 2), C(6, 0)에 대하여 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① (2, -1)

② (2, -2)

③ (2, -3)

④ (-2, 3)

⑤ (-2, -3)

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기 : $\frac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ 수직이등분선

$$: y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$, 중심은 (4, 1) $\Rightarrow$ 수직이등분

$$\text{선: } y = 2(x - 4) + 1$$

두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2, y = -3$

$\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

$$\therefore (2, -3)$$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

O(x, y)라고 하면

$$\overline{AO} = \overline{CO} \text{에서 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + y^2, 7x - y = 17 \cdots \textcircled{7}$$

$$\overline{BO} = \overline{CO} \text{에서 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + y^2, 2x - y = 7 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{7} \textcircled{4} \text{에서 교점의 좌표는 } (2, -3)$$

34. 세 점 $A(5, 0)$, $B(0, 3)$, $C(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8}, 0\right)$

② $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$

③ $O\left(0, \frac{5}{8}\right)$

④ $O\left(0, \frac{8}{5}\right)$

⑤ $O(0, 0)$

해설

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로

$$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}, \overline{BO} = \overline{CO} \text{ 에서}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \dots$ ①

$$\overline{AO} = \overline{BO} \text{ 에서}$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$

$$\text{즉 } 5x - 3y = 8 \dots \text{ ②}$$

①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}, y = 0$

따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ 이다.

35. 정점 $A(3,1)$ 과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최소 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$

② 4

③ $2\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{5}$

⑤ $4\sqrt{3}$

해설

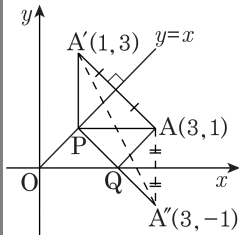
점 A 의 $y=x$ 에 대한 대칭점을 A'

점 A 의 x 축에 대한 A'' 라 하면

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \geq \overline{A'A''}$$

$$\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.



36. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게
중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1 + a + 3}{3} = 1$, $\frac{6 + b + 4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

37. 세 점 $A(-2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$, $C(1, -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

① 1 : 2

② 1 : 3

③ 1 : 4

④ 2 : 3

⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의
교점이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$$

