

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$$

3. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

해설

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
 a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열
 $\therefore a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
 $= 4 + 3n - 3$
 $= 3n + 1$
 $\therefore a_{10} = 31$

4. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

5. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

6. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2}\end{aligned}$$

7. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

8. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\overline{(\overline{(\overline{a})})})$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\overline{(\overline{(\overline{a})})})$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① $0, k$

② $0, k + 1$

③ $0, k - 1$

④ $1, k$

⑤ $1, k + 1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\overline{1})$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\overline{k+1})$ 도 참이다.

9. $a_1 = 1$, $4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 일반항 a_n 을 구하면?

① $\frac{1}{n}$

② $\frac{1}{2n-1}$

③ $\frac{1}{3n-2}$

④ $\frac{1}{4n-3}$

⑤ $\frac{1}{5n-4}$

해설

$4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ 의 양변을 a_na_{n+1} 로 나누면

$$4 = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n-3$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4n-3}$$

10. 수열 $\{a_n\}$ 이 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)를 만족시킨다.
 $a_1 = 3$, $a_5 = 25$ 일 때, a_{33} 의 값은?

① 175 ② 176 ③ 177 ④ 178 ⑤ 179

해설

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 = 3 \text{ 이므로 } a_5 = 3 + 4d = 25 \quad \therefore d = \frac{11}{2}$$

$$\therefore a_{33} = 3 + 32 \times \frac{11}{2} = 3 + 176 = 179$$

11. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 정의될 때, a_{10} 의 값은?

$a_1 = 4, a_2 = 6, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$

- ① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$
- ② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$
- ③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
- ④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$
- ⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 4$ 이고 공비 r 은 $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$ 이므로

$a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^9$

12. $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여
변끼리 더하면

$$\begin{array}{r} a_1 = a_1 + 1^2 \\ a_2 = a_1 + 1^2 + 2^2 \\ a_3 = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ \vdots \\ +) a_{10} = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 \\ \hline a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2) \\ = 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} \\ = 290 \end{array}$$

13. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 일반항 a_n 은?

① 2^{n-1}

② $2^{n-1} + n - 1$

③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$

⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 양변에 $n = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 을 대입하여
변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^n - 1$$

14. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2^1 a_1$$

$$a_3 = 2^2 a_2$$

$$a_4 = 2^3 a_3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$$

$$\therefore a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$a_{10} = 2^{50} \text{ 이므로 } 2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$$

$$a_1 = 2^5 = 32$$

15. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = n^2 a_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$
$$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1} \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$$
$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad (n \geq 1)$$
$$\therefore a_n = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} \quad \therefore a_{10} = 110 \times$$
$$= 110 \times \frac{2}{n(n+1)}$$
$$\frac{2}{110} = 2$$

16. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① $3 - 2^{12}$

② $3 - 2^{11}$

③ $3 - 2^{10}$

④ $3 - 2^9$

⑤ $3 - 2^8$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$ 의 양변에 -3 을 더하여 정리하면

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 - 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 3 - 2^9$$

17. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{20} 의 값은?

- ① $2 \cdot 3^{19} - 1$ ② $2 \cdot 3^{19} + 1$ ③ $2 \cdot 3^{20} - 1$
④ $2 \cdot 3^{20} + 1$ ⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$ 꼴로 변형한다.

$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ 의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$ 에서

$-2\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = -1$

즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

따라서 수열 $\{a_n + 1\}$ 은

첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$ 이고 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$

$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

18. $a_1 = 3, a_2 = 5, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 제 2014 항은?

① 5 ② 3 ③ -2 ④ -3 ⑤ -5

해설

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 3, 5, 2, -3, -5, -2가 계속해서 반복된다.

이 때, $2014 = 6 \times 335 + 4$ 이므로

$$a_{2014} = a_4 = -3$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의될 때,
 $a^{2014} a^{2015} a^{2016}$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = \frac{1}{2}, a_6 = -1, \dots$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{1}{2}, -1$ 이 반복되는 수열이고

$a^{2014}, a^{2015}, a^{2016}$ 은 연속한 세 항의 곱이므로

$$2 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -1$$

20. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

- ① $\frac{1}{n}$ ② $\frac{1}{n+1}$ ③ $\frac{1}{n+2}$ ④ $\frac{2}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1, \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1인 등차 수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \frac{1}{n}$$

21. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

22. $a_1 = p, a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의되는 수열이 있다.
다음 중 임의의 양수 p 에 대하여 $a_n = p$ 가 되도록 하는 n 의 값은?

- ① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$$a_1 = p, a_2 = -\frac{1}{p+1},$$
$$a_3 = \frac{-1}{-\frac{1}{p+1} + 1} = -\frac{p+1}{p},$$
$$a_4 = \frac{-1}{-\frac{p+1}{p} + 1} = p, a_5 = -\frac{1}{p+1}, \dots$$

$\therefore a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{22} = a_{25} = \dots = p$
즉, $n = 3k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면 $a_n = p$ 이다.
 $\therefore a_{22} = p$

23. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉞]에 알맞은 것은?

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 3$, (우변) $= 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 식이 성립한다고 가정하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = k^2 + 2k \cdots \cdots$ ㉠ 이다.
㉠의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3) = k^2 + 2k + (2k + 3) =$
 $(k + 1)^2 + 2(k + 1)$
이므로 [㉞]일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

- ① $n = -k + 1$ ② $n = -k + 2$ ③ $n = k + 1$
- ④ $n = k + 2$ ⑤ $n = 2k + 1$

해설

㉞의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3)$
 $= k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$
이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

24. 양의 정수 n 에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n \{p(n) - 1\}$ ($n = 2, 3, 4, \cdots$) 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때 (좌변) $= p(1) = 1$
(우변) $= 2 \{p(2) - 1\} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$
 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (\ominus)p(k) - k$
 $= (\ominus) \{p(k+1) - \textcircled{\cup}\} - k$
 $= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$ 이므로 $n = k+1$ 일 때 성립한다.
따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\ominus$, $\textcircled{\cup}$ 에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① $k, \frac{1}{k}$

② $k, \frac{1}{k+1}$

③ $k+1, \frac{1}{k}$
- ④ $k+1, \frac{1}{k+1}$

⑤ $k+2, \frac{1}{k}$

해설

$n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면
 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$ 이고,
 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k) = k \{p(k) - 1\} + p(k)$
 $= (k+1)p(k) - k$
 $= (k+1) \left\{p(k+1) - \frac{1}{k+1}\right\} - k$
 $= (k+1) \{p(k+1) - 1\}$
 $\therefore \ominus : k+1, \textcircled{\cup} : \frac{1}{k+1}$

25. 다음은 n 이 자연수일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{(가)})$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{(나)})$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① $2k^2 + 7k + 4, 2k + 2$
- ② $2k^2 + 7k + 5, 2k + 2$
- ③ $2k^2 + 7k + 5, 2k + 3$
- ④ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 2$
- ⑤ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 3$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2 + 7k + 6})$
 $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

26. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ 이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 □을 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \square = (k + 1)^2$ 이므로
 $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $2k + 1$

② $2k - 1$

③ $2k$

④ $k + 1$

⑤ $k - 1$

해설

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k + 1}$ 을 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{2k + 1} = (k + 1)^2$ 이므로
 $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

27. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= 1 \cdot 2 = 2$, (우변) $= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$ 이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$ 이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 을 더하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)} = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$ $= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$ 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k
- ② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$
- ③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k
- ④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$
- ⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$ 이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$ 을 더하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}} = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$ $= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$ 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

28. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - \text{㉡} > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

㉠ $n = 1, k^2$

㉡ $n = 1, (k+1)^2$

㉢ $n = 5, (k-1)^2$

㉣ $n = 5, k^2$

㉤ $n = 5, (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore$ ㉠ $n = 5, \text{㉡} (k+1)^2$

29. 컴퓨터가 n 대 있는 게임방에서 컴퓨터 사이를 케이블선으로 다음 그림과 같은 방법으로 연결하려고 한다.

컴퓨터의 대수	2	3	4	...
전화선의 수	1	2	6	...
연결 방법				...

이때, 11 대의 컴퓨터를 연결하는 데 필요한 케이블선의 개수는?

- ① 37
- ② 45
- ③ 55
- ④ 66
- ⑤ 78

해설

컴퓨터가 n 대일 때, 필요한 케이블선의 개수를 a_n 이라고 하면

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3$$

⋮

$$a_{10} = a_9 + 9$$

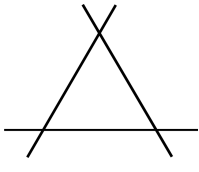
$$a_{11} = a_{10} + 10$$

위의 식들을 변끼리 더하면

$$a_2+a_3+\cdots+a_{10}+a_{11} = a_2+a_3+\cdots+a_{10}+1+2+3+\cdots+9+10$$

$$\therefore a_{11} = 1+2+3+\cdots+9+10 = 55$$

30. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n 개의 직선이 있다. n 개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n 이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$ 을 나타낸다. a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.



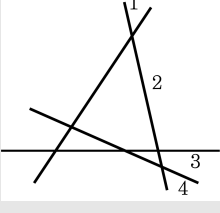
▶ 답 :

▷ 정답 : $a_{n+1} = a_n + n + 1$

해설

n 개의 직선이 있는 상황에서 직선 하나가 늘어날 때 추가되는 평면의 개수를 구한다.

3개의 직선이 있는 상태에서 직선이 하나 추가되면 새로운 직선이 3개의 직선과 각각 만나 오른쪽 그림과 같이 4개의 평면이 새로 생긴다. 같은 방법으로 n 개의 직선이 있는 상태에서 직선 하나를 추가하면 추가된 직선은 기존의 n 개의 직선과 모두 만나 새로운 평면 $n + 1$ 개를 만드므로 $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$ 이 성립한다.



31. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_n + S_n = n$ 과 같이 정의될 때, 일반항 a_n 은?(단, $n = 1, 2, 3, \dots$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)

- ① $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- ③ $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- ④ $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- ⑤ $2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

해설

$a_1 + S_1 = 1, S_1 = a_1$ 이므로 $2a_1 = 1$

$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} a_{n+1} + S_{n+1} = n+1 \\ -) a_n + S_n = n \\ \hline a_{n+1} - a_n + a_{n+1} = 1 \end{array}$$

에서 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$

$\therefore a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1) (n = 1, 2, 3, \dots)$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$ 은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$a_n - 1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

32. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

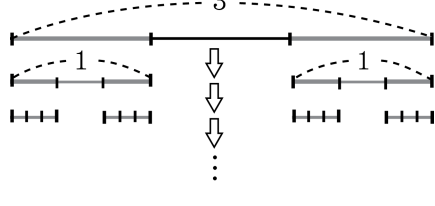
- ㉠ $a_2 = -1$
㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$
㉢ 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ 에서 $n = 1$ 을 대입하면
 $2\sum_{k=1}^1 a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$
즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$
 $\therefore a_2 = \frac{4a_1 + 1}{3} = -\frac{3}{3} = -1$ (참)
㉡ $2\sum_{k=1}^n a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots \text{㉠}$
 $2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots \text{㉡}$
㉡-㉠에서
 $2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
 $\therefore 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$ (거짓)
㉢ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$
 $= 2(3a_{n+1} - a_n)$
따라서 수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다. (참)
따라서, 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

33. 다음 그림과 같이 길이가 3인 실이 있다. 이 실을 3등분하여 자른 후 가운데의 것은 버리고 다시 남은 두 실을 3등분하여 자른 후 가운데 것은 버린다. 이와 같은 시행을 20회 반복하였을 때, 남아있는 실의 길이의 합은?



- ① $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^{21}$
 ④ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ⑤ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

해설

위 과정을 n 회 반복하였을 때, 남아 있는 실의 길이의 합을 a_n 이라고 하면

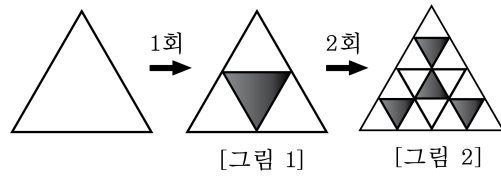
$$a_1 = 3 \times \frac{2}{3} = 2, \quad a_2 = a_1 \times \frac{2}{3}, \quad a_3 = a_2 \times \frac{2}{3}, \dots \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore a_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{따라서 구하는 실의 길이의 합은 } a_{20} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$$

34. 앞면에는 흰색, 뒷면에는 검은색이 칠해진 정삼각형 모양의 종이가 있다. [그림1]과 같이 각 변의 중점을 잇는 선분을 경계로 잘라 그 중간에 삼각형을 뒤집어 놓으면 합동인 4개의 정삼각형 중 세 개는 흰색이고, 가운데 하나는 검은색이다. 이 4개의 삼각형을 뒤집어 처음과 같은 방법으로 시행하면 [그림2]와 같다. 이와 같은 시행을 계속해서 3회 하였을 때, 만들어진 삼각형 중에서 흰색인 삼각형의 개수는?



- ① 24개 ② 36개 ③ 48개 ④ 60개 ⑤ 80개

해설

n 번 시행 후 흰색, 검은색의 삼각형의 개수를 각각 a_n, b_n 이라 하면 $a_n + b_n = 4^n$ 이므로 $a_{n+1} = 3a_n + b_n = 3a_n + (4^n - a_n)$
 $\therefore a_{n+1} = 2a_n + 4^n$
 $\therefore a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 36$

35. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 짝수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k + 2$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 2)$ 가 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 2, \quad b = 2$
 $\therefore a + b = 4$

36. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $p(a)$ 가 참이다.
(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

자연수는 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열을 이루므로 $p(1)$ 이 참임을 증명한다.
 k 가 자연수이면 그 다음 자연수는 $k + 1$ 이므로 $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k + 1)$ 이 참임을 증명해야 한다.
 $\therefore a = 1, \quad b = 1$
 $\therefore a + b = 2$

37. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, $4 > 2 + 1$ 이므로 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때,
 $2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$ 이 성립한다고 가정하자. $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 양변에 2를 곱하면
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$
이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{(나)} = k^2 - k - 1$
 $k \geq 2$ 일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{(다)} 0$ 이므로
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{(나)}$
 $\therefore 2^{k+2} > \boxed{(나)}$
따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$

② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$

③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $<$

⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

해설

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때,
 $2^{k+1} > \boxed{k(k+1)} + 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$ 이 성립한다고 가정하자. $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 양변에 2를 곱하면
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$
이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}} = k^2 - k - 1$
 $k \geq 2$ 일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{>} 0$ 이므로
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}}$
 $\therefore 2^{k+2} > \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}}$
따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립한다.

38. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sqrt{17}-4 = \frac{1}{8+a_1} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}} =$

... 일 때, a_{2014} 의 값은?

- ① $\sqrt{17}-4$

② $3-\sqrt{17}$

③ $5-\sqrt{17}$
- ④ $\sqrt{17}$

⑤ $\sqrt{17+4}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{17}-4 &= \frac{1}{8+a_1} \\ 8+a_1 &= \frac{1}{\sqrt{17}-4} = \sqrt{17}+4 \\ a_1 &= \sqrt{17}-4 \\ \text{그런데 } a_1 &= \frac{1}{8+a_2} \text{ 이므로} \\ a_n &= \frac{1}{8+a_{n+1}} \\ a_{n+1}+8 &= \frac{1}{a_n} \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{1}{a_n}-8 \\ a_2 &= \frac{1}{a_1}-8 = \frac{1}{\sqrt{17}-4}-8 \\ &= \sqrt{17}+4-8 = \sqrt{17}-4 \\ a_3 &= \frac{1}{a_2}-8 = \frac{1}{\sqrt{17}-4}-8 \\ &= \sqrt{17}-4 \\ \therefore a_1 &= a_2 = a_3 = \cdots = a_n \\ &= \sqrt{17}-4 \\ \therefore a_{2014} &= \sqrt{17}-4\end{aligned}$$