1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

2. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4 의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

3. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29　　② 31　　③ 33　　④ 35　　⑤ 37

4. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n - 3(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

5. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

6. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

7. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26　　② 31　　③ 36　　④ 46　　⑤ 51

8. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다. (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(나)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $0,\ k$　　② $0,\ k+1$　　③ $0,\ k-1$

④ $1,\ k$　　⑤ $1,\ k+1$

9. $a_1 = 1,\ 4a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n을 구하면?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{2n-1}$ ③ $\dfrac{1}{3n-2}$

④ $\dfrac{1}{4n-3}$ ⑤ $\dfrac{1}{5n-4}$

10. 수열 $\{a_n\}$이 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$를 만족시킨다. $a_1 = 3,\ a_5 = 25$일 때, a_{33}의 값은?

① 175 ② 176 ③ 177 ④ 178 ⑤ 179

11. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$　② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$　③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$　⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

12. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

답: ____________

13. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 일반항 a_n 은?

① 2^{n-1} ② $2^{n-1} + n - 1$ ③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$ ⑤ $2^{n+1} - 3$

14. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32　　② 64　　③ 128　　④ 256　　⑤ 512

15. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

답: ____________

16. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① $3 - 2^{12}$ ② $3 - 2^{11}$ ③ $3 - 2^{10}$

④ $3 - 2^{9}$ ⑤ $3 - 2^{8}$

17. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{20} 의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$　　② $2 \cdot 3^{19} + 1$　　③ $2 \cdot 3^{20} - 1$

④ $2 \cdot 3^{20} + 1$　　⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

18. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 제 2014 항은?

① 5　　② 3　　③ -2　　④ -3　　⑤ -5

19. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의될 때, $a^{2014}a^{2015}a^{2016}$의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

20. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{n+1}$ ③ $\dfrac{1}{n+2}$ ④ $\dfrac{2}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

21. $a_1 = 3,\ a_2 = \dfrac{3}{7},\ \dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \dfrac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

답: ____________

22. $a_1 = p,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{a_n + 1}\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의되는 수열이 있다.

다음 중 임의의 양수 p에 대하여 $a_n = p$가 되도록 하는 n의 값은?

① 20　② 21　③ 22　④ 23　⑤ 24

23. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n=1$일 때,
  (좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
  $3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$ ① 이다.
  ①의 양변에 $2k+3$를 더하면
  $3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=$
  $(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 [㉠] 일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$ ② $n=-k+2$ ③ $n=k+1$

④ $n=k+2$ ⑤ $n=2k+1$

24. 양의 정수 n에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$이라 할 때 다음은

$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n\left\{p(n) - 1\right\}$ $(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$일 때 (좌변)$= p(1) = 1$ (우변)$= 2\left\{p(2) - 1\right\} = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$이므로 성립한다. (ii) $n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k\left\{p(k) - 1\right\}$ $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (㉠)p(k) - k$ $= (㉠)\left\{p(k+1) - ㉡\right\} - k$ $= (k+1)\left\{p(k+1) - 1\right\}$ 이므로 $n = k+1$일 때 성립한다. 따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k,\ \frac{1}{k}$ ② $k,\ \frac{1}{k+1}$ ③ $k+1,\ \frac{1}{k}$

④ $k+1,\ \frac{1}{k+1}$ ⑤ $k+2,\ \frac{1}{k}$

25. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$ ② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$

③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$ ④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$

⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

26. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 증명한 것이다. ㅁ안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $2k+1$ ② $2k-1$ ③ $2k$

④ $k+1$ ⑤ $k-1$

27. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을
수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
$= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

28. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

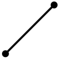
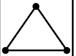
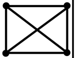
(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다. (ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$ 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$ $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$ 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다. (i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$ ② $n = 1,\ (k+1)^2$

③ $n = 5,\ (k-1)^2$ ④ $n = 5,\ k^2$

⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

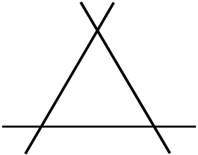
29. 컴퓨터가 n대 있는 게임방에서 컴퓨터 사이를 케이블선으로 다음 그림과 같은 방법으로 연결하려고 한다.

컴퓨터의 대수	2	3	4	$\cdots$
전화선의 수	1	2	6	$\cdots$
연결 방법				$\cdots$

이때, 11대의 컴퓨터를 연결하는 데 필요한 케이블선의 개수는?

① 37　　② 45　　③ 55　　④ 66　　⑤ 78

30. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n개의 직선이 있다. n개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$을 나타낸다. a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.



답:

31. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n + S_n = n$과 같이 정의될 때, 일반항 a_n은?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$)

① $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ③ $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

④ $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ⑤ $2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

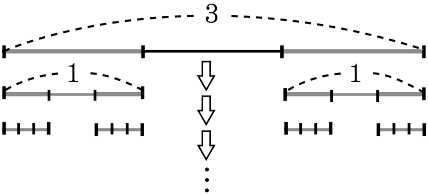
32. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기
㉠ $a_2 = -1$
㉡ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$
㉢ 수열 $\left\{3a_{n+1} - a_n\right\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

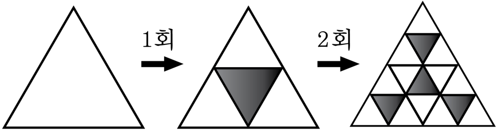
33. 다음 그림과 같이 길이가 3 인 실이 있다. 이 실을 3등분하여 자른 후 가운데의 것은 버리고 다시 남은 두 실을 3등분하여 자른 후 가운데 것은 버린다. 이와 같은 시행을 20 회 반복하였을 때, 남아있는 실의 길이의 합은?



① $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$　② $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$　③ $\left(\frac{2}{3}\right)^{21}$

④ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$　⑤ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

34. 앞면에는 흰색, 뒷면에는 검은색이 칠해진 정삼각형 모양의 종이가 있다. [그림1]과 같이 각 변의 중점을 잇는 선분을 경계로 잘라 그 중 가운데 삼각형을 뒤집어 놓으면 합동인 4개의 정삼각형 중 세 개는 흰색이고, 가운데 하나는 검은색이다. 이 4개의 삼각형을 뒤집어 처음과 같은 방법으로 시행하면 [그림2]와 같다. 이와 같은 시행을 계속해서 3회 하였을 때, 만들어진 삼각형 중에서 흰색인 삼각형의 개수는?



[그림 1] [그림 2]

① 24개 ② 36개 ③ 48개 ④ 60개 ⑤ 80개

35. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ____________

36. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

> (i) $p(a)$가 참이다.
> (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ____________

37. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, $4>2+1$이므로 성립한다.
(ii) $n=k(k \ge 2)$일 때,
$2^{k+1} > \boxed{\text{(가)}} + 1 \cdots$ ㉠이 성립한다고 가정하자. ㉠의 양변에 2를 곱하면
$2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$
이때, $2(k^2+k+1) - \boxed{\text{(나)}} = k^2-k-1$
$k \ge 2$일 때, $k^2-k-1 \boxed{\text{(다)}} 0$이므로
$2^{k+2} > 2(k^2+k+1) > \boxed{\text{(나)}}$
$\therefore\ 2^{k+2} > \boxed{\text{(나)}}$
따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$

② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$

③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $<$

⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

38. 수열 $\{a_n\}$이 $\sqrt{17}-4=\dfrac{1}{8+a_1}=\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{8+a_2}}=\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{8+a_3}}}=$

$\cdots$ 일 때, a_{2014}의 값은?

① $\sqrt{17}-4$ ② $3-\sqrt{17}$ ③ $5-\sqrt{17}$

④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17+4}$