**1.** 수열 $1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 에서 2014 번째 항은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 수열은 $1, 2, 3, 4, 5$ 의 5 개의 숫자가 반복되므로 $2014 = 5 \times 402 + 4$ 에서 2014 번째 항은 4 이다.

**2.** 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$ 의 일반항을 $a_n$이라 할 때, $a_{2015}$의 값은?

① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 $n$ 항의 분자는 $n$이고 분모는 $n+1$이다.
따라서 구하는 수열의 일반항 $a_n$은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.
$\therefore\ a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$

**3.** $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = a\sqrt{2}+b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$= -\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$

$+\left\{(\sqrt{49}-\sqrt{50})\right\}$

$= -(1-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2}-1$

따라서, $a=5,\ b=-1$에서 $a+b=4$

**4.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식) $= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$

$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

**5.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$　② $\frac{2n}{n+1}$　③ $\frac{n}{2n+1}$
④ $\frac{n}{n+2}$　⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

(준 식)$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\}$

$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \right\}$

$+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$

$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

**6.** 수열 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 50까지의 합은?

① $\frac{48}{49}$ ② $\frac{50}{49}$ ③ $\frac{49}{50}$ ④ $\frac{51}{50}$ ⑤ $\frac{50}{51}$

해설

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\cdots = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$

따라서, 이 수열의 첫째항부터 제 50항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$

$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$

**7.** 함수 $f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{f(k)}$의 값은?

① $\dfrac{40}{7}$ ② $\dfrac{45}{8}$ ③ $\dfrac{17}{3}$ ④ $\dfrac{57}{10}$ ⑤ $\dfrac{63}{11}$

해설

$f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$=\sum_{k=1}^{20}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{f(x)}=\sum_{k=1}^{20}\dfrac{2k+1}{\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$=\sum_{k=1}^{20}\dfrac{6}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{20}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=6\left(1-\dfrac{1}{21}\right)=6\times\dfrac{20}{21}=\dfrac{40}{7}$

**8.** $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+2015}$ 의 값은?

① $\frac{2014}{2015}$　② $\frac{2015}{2016}$　③ $\frac{2015}{1008}$　④ $\frac{2014}{1008}$　⑤ $2$

**해설**

$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$ 이므로

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{2015}\frac{2}{n(n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{2015}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{2016}\right)=\frac{2\times 2015}{2016}=\frac{2015}{1008}$

**9.** $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{5}{48}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 3n - \left\{(n-1)^2 + 3(n-1)\right\} = 2n + 2(n \geq 2)$

$a_1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$ 이므로, $a_n = 2n + 2(n \geq 1)$

$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$

$= \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\}$

$= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5}{24}$

**10.** 수열 $2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 12,\ \cdots$ 에서 처음으로 200보다 커지는 항은?

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

해설

주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면, 그 계차수열의 일반항 $b_n$은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

$\therefore b_n = n$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$

$= 2 + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n^2-n}{2} + 2$

따라서 $\dfrac{n^2-n}{2} + 2 > 200$에서 $n^2 - n = n(n-1) > 396$

이므로 $19 \times 20 = 380,\ 20 \times 21 = 420$에서 $n = 21$

**11.** 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \dfrac{n(1-x^n)}{2}$　　② $S = \dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S = \dfrac{1-x^n}{2} - \dfrac{2x^n}{x}$　　④ $S = \dfrac{1-x^n}{1+x} - \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 $x$를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -)\ xS = & \quad\ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$= \dfrac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$

$\therefore S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

**12.** 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots$ ㉠

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

**13.** 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은?

(가) $a_{4n} = n^2 (n \geq 1)$
(나) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} (n \geq 1)$

① 210 ② 385 ③ 420 ④ 560 ⑤ 770

해설

(나)에서 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4,\ a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \cdots$ 이므로
$\sum_{k=1}^{40} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40})$
$= 2a_4 + 2a_8 + 2a_{12} + \cdots + 2a_{40}$
$= 2\sum_{k=1}^{10} a_{4k} = 2\sum_{k=1}^{10} k^2 (\because (가))$
$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770$

**14.** 수열 $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3, \cdots$ 의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합은?

① $2^n - n$　② $2^{n+1} - 1$　③ $2^{n+1} - n$

④ $2^{n+1} - n - 1$　⑤ $2^{n+1} - n - 2$

해설

수열의 일반항 $a_n$ 은

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

따라서 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합 $S_n$ 은

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

**15.** 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = (7^n$을 10으로 나눈 나머지$)$로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{2014} a_n$의 값은?

① 10071 ② 10073 ③ 10075

④ 10076 ⑤ 10079

해설

$\{a_n\} : 7,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7, \cdots$

으로 4항마다 같은 항이 반복된다.

$2014 = 4 \times 503 + 2$이므로

$\sum_{n=1}^{2014} a_n = \sum_{n=1}^{503} (7+9+3+2) + a_1 + a_2$

$= \sum_{n=1}^{503} 20 + 7 + 9 = 20 \times 503 + 16 = 10076$

**16.** 수열 $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\cdots$ 에서 첫째항부터 제 100항까지의 합은?

① 930　② 945　③ 950　④ 955　⑤ 960

해설

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), $\cdots$ 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 $n$군의 항수는 $n$이므로 100번째 항은

$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} < 100$

에서 $\dfrac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제 14군의 9항이다.

그리고 제 $n$군까지의 합을 구해 보면

$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

첫째항부터 제 100항까지의 합 $S_{100}$은 제 13군까지의 합에 14를 9개 더한 값이 된다.

$\therefore S_{100} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$

**17.** 두 수 0, 1을 사용하여 다음과 같은 수열을 만들었을 때, 10001 은 몇 번째 항인가?

| |
|---|
| 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001 ⋯ |

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

각 항의 자리 수에 따라 군수열을 만들면
(1), ( 10, 11), ( 100, 101, 110, 111),⋯
10001 은 제 5군의 2번째 수이고 1 ~ 4군까지는
$1+2+4+8=15$개의 항이 있으므로
10001 은 $15+2=17$번째 항이다.

**18.** $a_n = 1,\ a_2 = 2+3,\ a_3 = 4+5+6,\ a_4 = 7+8+9+10, \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$의 제10항의 값은?

① 515 ② 511 ③ 508 ④ 505 ⑤ 502

해설

$a_1 = 1$

$a_2 = 2+3$

$a_3 = 4+5+6$

$a_4 = 7+8+9+10$

$\vdots$

과 같은 수열 $\{a_n\}$은 연속된 자연수의 합으로 이루어진 수열로 $a_9$까지의 연속된 수들의 개수의 합은

$\sum_{k=1}^{9} k = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 46 + 47 + 48 + \cdots + 55 \\ &= \frac{10(46+55)}{2} \\ &= 505 \end{aligned}$$

**19.** 수열 $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\cdots$ 의 제125항은?

① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

해설

이 수열을 다음과 변형해서 분모가 같은 것까지 묶으면 군수열이 만들어진다.

$(1),\ \left(\frac{2}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{4}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4}\right),\cdots$

따라서 제$n$군까지의 항수는

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고,

$\frac{15\times16}{2} = 120$ 이므로

제125항은 제16군의 5번째 항이 된다.

제16군은

$\left(\frac{16}{16},\ \frac{15}{16},\ \frac{14}{16},\ \frac{13}{16},\ \frac{12}{16},\ \frac{11}{16},\cdots,\frac{1}{16}\right)$ 이므로

제125항은 5번째 항인 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ 이다.

**20.** 수열 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (3,\ 0),$
$(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3),\ (4,\ 0)\cdots$ 에서 $(10,\ 9)$는 제 몇 항인가?

① 180 ② 189 ③ 198 ④ 199 ⑤ 206

해설

$x$좌표와 $y$좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
$\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ \{(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)\},$
$\{(3,\ 0),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3)\},\cdots$
$(10,\ 9)$은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.
$\therefore (2+3+4+\cdots+19)+10=199$

**21.** 오른쪽 그림과 같이 연속한 자연수 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 나열할 때, 위에서 5 번째 행의 왼쪽에서 11 번째 열의 수는?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 9 | 16 | $\cdots$ |
| 2 | 3 | 8 | 15 | |
| 5 | 6 | 7 | 14 | |
| 10 | 11 | 12 | 13 | |
| $\vdots$ | | | | $\ddots$ |

① 113　② 114　③ 116　④ 117　⑤ 119

해설

수열로 표시하면

$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9), \cdots$

로 묶을 수 있으며 제 $n$군의 끝항은

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 이므로 위에서 5 번째 행, 왼쪽에서 11 번째 열의 수는 제 11 군의 끝항에서 5 번째에 있는 수이다.

$\therefore 11^2-4=117$

**22.** 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10 행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

$$\begin{array}{llllllll}
\text{제1행} & & & & 1 & & & \\
\text{제2행} & & & 3 & 5 & 7 & & \\
\text{제3행} & & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \\
\text{제4행} & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \\
\vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underset{\text{제1군}}{\underline{(1)}}$, $\underset{\text{제2군}}{\underline{(3,\ 5,\ 7)}}$, $\underset{\text{제3군}}{\underline{(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)}}$, $\cdots$ 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 9,\ 19, \cdots$

$\{b_n\} : 2,\ 6,\ 10, \cdots$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$

이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10 행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는

$163 + (5-1) \times 2 = 171$

**23.** $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{21^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{22}$ ② $\frac{3}{22}$ ③ $\frac{5}{22}$ ④ $\frac{7}{22}$ ⑤ $\frac{9}{22}$

해설

$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{(2n+1-1)(2n+1+1)}$

$=\frac{1}{2n\cdot(2n+2)}$

$=\frac{1}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n+1-n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\sum_{k=1}^{10} a_k$

$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{10}{44}=\frac{5}{22}$

**24.** 자연수 $n$ 이하의 모든 수의 곱을 $n!$로 나타낸다. 예를 들어 $5! = 5\times4\times3\times2\times1$이다. 이때, $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{10}{11!}$의 값은?

① $\frac{9}{10!}$　② $\frac{10}{11!}$　③ $1-\frac{1}{10!}$
④ $1-\frac{1}{11!}$　⑤ $1-\frac{1}{12!}$

해설

일반항을 $a_n$이라 하면 $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$이다.

여기서 분자를 변형하면 부분분수의 꼴로 바꿀 수 있다.

즉, $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$\therefore \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{2}{11!}$

$= \left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10!}-\frac{1}{11!}\right)$

$= 1-\frac{1}{11!}$

**25.** $\sum_{k=1}^{30} k - 2\sum_{k=1}^{30}\left[\frac{k}{2}\right]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\sum_{k=1}^{30} k - 2\sum_{k=1}^{30}\left[\frac{k}{2}\right] = \sum_{k=1}^{30}\left(k - 2\left[\frac{k}{2}\right]\right)$ 이므로

$k$에 1부터 30까지 차례로 대입하면

(주어진 식)$= 1+0+1+0+1+0+1+0+\cdots+1+0 = 15$

**26.** 수열 $2,\ 3,\ 6,\ 11,\ 18, \cdots$ 의 일반항 $a_n$ 은?

① $n^2+2n+3$ ② $n^2-2n+3$ ③ $n^2-2n-3$

④ $n^2+2n-3$ ⑤ $n^2-2n$

해설

주어진 수열을 $\{a_n\}$, 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라하면

$\{a_n\}:\ 2,\ \ 3,\ \ 6,\ \ 11,\ \ 18,\ \cdots$

$\quad\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee$

$\{b_n\}:\ \ 1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 7,\ \cdots$

계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n = 2n-1$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$= 2 + 2\cdot\dfrac{(n-1)n}{2} - (n-1) = n^2-2n+3$

**27.** 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 에 대하여 제50항의 수를 구하면?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{10}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{4}{10}$ ⑤ $\frac{5}{10}$

해설

군으로 나눠보면

$\frac{1}{1} / \frac{1}{2}, \frac{2}{2} / \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} / \frac{1}{4},$

1군의 항수= 1

2군의 항수= 2

3군의 항수= 3

$\vdots$

50 항이 $k$ 군에 있다고 하자

$(k-1)$ 군까지 항수의 총합 $= 1+2+\cdots+(k-1) = \frac{(k-1)\cdot k}{2}$

$\frac{(k-1)\cdot k}{2} < 50$

$(k-1)k < 100$

$k = 10$ 일 때 $(k-1)k = 90$

$k = 11$ 일 때 $(k-1)k = 110$ 이므로

$k = 10$

따라서 50 항은 10 군에 있다.

9군까지의 항수 $= \frac{9\cdot 10}{2}$

$= 45$

10 군의 초항은 46 번째 항이므로

50 번째항은 10 군의 5 번째항

10 군은

$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \cdots$ 이므로

50 번째항은 $\frac{5}{10}$

**28.** 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제130항을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 261

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots,$

제1군　제2군　　제3군,

$\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2k-1}{2^n}\right)$

제4군

제 $n$ 군의 항수는 $2^{n-1}$ 이므로 제1군에서 제$n$군까지의 항수의 합은

$1+2+\cdots+2^{n-1} = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$

이때, $n=7$ 이면 $2^7-1=128-1=127$ 이므로 제 130항은 제8군의 3번째 항이다.

제$n$군에서 각 항의 분모는 $2^n$ 이고, $k$ 번째 항의 분자는 $2k-1$ 이므로

제8군의 3번째 항은 $\frac{2\cdot 3-1}{2^8} = \frac{5}{256}$

따라서 제130항은 $\frac{5}{256}$ 이므로 $p=256,\ q=5$

$\therefore p+q=256+5=261$

**29.** 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 $\omega$라 하자. 자연수 $n$에 대하여 $f(n)$을 $\omega^n$의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 332

해설

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 한 허근이 $\omega$이므로

$\omega^2-\omega+1=0,\ \ \omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이때, $f(n)$은 $\omega^n$의 실수 부분이고, $\omega^3=-1,\ \omega^2=\omega-1$이므로 $f(n)$을 차례로 구하면

$\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(1)=\frac{1}{2}$

$\omega^2=\omega-1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(2)=-\frac{1}{2}$

$\omega^3=-1$이므로 $f(3)=-1$

$\omega^4=\omega^3\omega=-\omega$이므로 $f(4)=-f(1)=-\frac{1}{2}$

$\omega^5=\omega^3\omega^2=-\omega^2$이므로 $f(5)=-f(2)=\frac{1}{2}$

$\omega^6=(\omega^3)^2=1$이므로 $f(6)=-f(3)=1$

$\omega^7=(\omega^3)^2\cdot\omega=\omega$이므로 $f(7)=f(1)$ 따라서, $f(1)+(2)+\cdots+f(6)=0$

$\therefore\ \ \sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{999}f(k)+\sum_{k=1}^{999}\frac{1}{3}$

$=166\sum_{k=1}^{6}f(k)+f(997)+f(998)+f(999)+999\cdot\frac{1}{3}$

$=166\cdot 0+f(1)+f(2)+f(3)+333$

$=0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right)+333$

$=332$