

1. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

2, 4, 8, 16,.....

① $(-2)^n$

② 2^{n-1}

③ 2^{n+1}

④ 2^n

⑤ $(-2)^{n-1}$

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고 공비가 2이므로 $a_n = 2^n$

2. 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 끝항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 항의 개수는?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$n-1 = 2$$

$$n = 3$$

3. 첫째항이 1, 공비가 -3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

- ① 61 ② 122 ③ 244 ④ 361 ⑤ 722

해설

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ 에서}$$

$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61$$

4. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

5. 두 수 1과 64사이에 다섯 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 를 넣어서 만든 수열이 등비수열을 이룰 때, a_3 의 값은?(단, $a_3 > 0$)

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

주어진 수열이 등비수열을 이루므로

1, a_3 , 64도 등비수열을 이룬다.

$$(a_3)^2 = 1 \cdot 64 \quad \therefore a_3 = 8$$

6. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$
이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때, 수열 $\{3a_{n+1} - 2a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면
 $a_n = ar^{n-1}$ 이므로
 $\{3a_{n+1} - 2a_n\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
 $= (3ar - 2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$
따라서 $r = 2$ 이고 $3ar - 2a = 12$ 이다.
 $6a - 2a = 12, 4a = 12$
 $\therefore a = 3$

8. 각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8}$ 일 때, 첫째항의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_3 = \frac{5}{6} \text{에서, } a_1 + a_1 r^2 = \frac{5}{6}$$

$$a_2 a_3 a_4 = \frac{1}{8} \text{에서 } (a_1 r^2)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{즉, } a_3 = a_1 r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

9. 등비수열 $\sqrt{2}+1, 1, \sqrt{2}-1, 3-2\sqrt{2}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

- ① $(\sqrt{2}-1)^{98}$ ② $(\sqrt{2}-1)^{99}$ ③ $(\sqrt{2}-1)^{100}$
④ $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{90}$ ⑤ $2(\sqrt{2}-1)^{90}$

해설

$$\text{공비를 } r \text{이라 하면 } r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\therefore a_n = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_{100} &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99} \\ &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98} \\ &= (\sqrt{2}-1)^{98}\end{aligned}$$

10. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = x - 3$, $a_2 = x$, $a_3 = x + 6$ 이 성립할 때, a_5 의 값은?

① 16

② 24

③ 32

④ 48

⑤ 52

해설

x 는 $x - 3$ 과 $x + 6$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = (x - 3)(x + 6) = x^2 + 3x - 18$$

$$3x = 18 \quad \therefore x = 6$$

즉, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2 인 등비수열이다.

$$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

11. 이차방정식 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 두 근의 등차중항을 A , 등비중항을 G 라 할 때, A^2, G^2 을 두 근으로 하는 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 $a + b$ 의 값은?

① 12 ② 15 ③ 24 ④ 27 ⑤ 39

해설

$x^2 - 6x + 3 = 0$ 에서 두 근을 α, β 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 3$$

$$\therefore A = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3, G = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{3}$$

이 때, A^2, G^2 즉, 9와 3을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x - 9)(x - 3) = 0 \quad \therefore x^2 - 12x + 27 = 0$$

따라서 $a = -12, b = 27$

12. 다항식 $f(x) = x^2 + ax$ 에 대하여 $f(x)$ 를 $x-2$, $x-1$, $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 모든 a 의 값의 합은?

① $-\frac{4}{3}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

다항식 $f(x)$ 를 $x-2$, $x-1$, $x+1$ 로 나눈 나머지는

$$f(2) = 4 + 2a, f(1) = 1 + a, f(-1) = 1 - a$$

그런데 나머지가 차례로 등비수열을 이루므로

$$(1+a)^2 = (4+2a)(1-a)$$

$$\therefore 3a^2 + 4a - 3 = 0$$

따라서, 모든 a 의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{4}{3}$ 이다.

13. 세 수 α , p , β 는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 α , $2\sqrt{q}$, β 는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α , β 로 나타내면?

① $\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}$

② $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$

③ α, β

④ $2\alpha, 2\beta$

⑤ $4\alpha, 4\beta$

해설

α , p , β 는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

α , $2\sqrt{q}$, β 는 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(2\sqrt{q})^2 = \alpha\beta, \quad 4q = \alpha\beta \quad \therefore q = \frac{\alpha\beta}{4}$$

$x^2 - px + q = 0$ 에서

$$x^2 - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)x + \left(\frac{\alpha\beta}{4}\right) = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근은 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ 이다.

14. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 $b, \frac{a}{2}, 7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루고, $a, -3, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 9 ② 33 ③ 50 ④ 67 ⑤ 81

해설

$$\frac{a}{2} = \frac{b+7}{2} \Rightarrow a-b=7$$

$$(-3)^2 = ab \Rightarrow ab=9$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + b^2 &= (a-b)^2 + 2ab \\ &= 7^2 + 2 \times 9 = 67 \end{aligned}$$

15. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 = 96$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127 ② 136 ③ 148 ④ 156 ⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = 96 \text{에서 } a + ar = 96 \cdots \text{㉠}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120 \text{에서 } 96 + a_3 + a_4 = 120$$

즉, $a_3 + a_4 = 24$ 이므로

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$= 96r^2 = 24$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{3}{2}a = 96 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\} = 128 - 1 = 127$$

16. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 5 \\ S_{20} &= \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{10} - 1)(r^{10} + 1)}{r - 1} = 30 \\ r^{10} + 1 &= 6 \text{ 이므로 } r^{10} = 5 \\ S_{30} &= \frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ 이므로} \\ S_{30} &= \frac{a(r^{10} - 1)(r^{20} + r^{10} + 1)}{r - 1} \\ &= 5 \cdot (r^{20} + r^{10} + 1) \\ &= 5 \cdot (5^2 + 5 + 1) \\ &= 5 \cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

17. 다항식 $x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① 511

② 512

③ 513

④ 1023

⑤ 1025

해설

$f(x) = x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$ 이라 하면

$f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$ 이다.

즉, $f(2) = 2^9 + 2^8 + \cdots + 2 + 1$

따라서 $f(2)$ 는 첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.

$$\therefore f(2) = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

18. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의

최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n-1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

19. 수열 8, 4, 2, $\frac{1}{2}, \dots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$

20. 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 a, b, c 인 직육면체에 대하여 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겉넓이가 180일 때, 이 직육면체의 부피는?

- ① 174 ② 188 ③ 202 ④ 216 ⑤ 230

해설

등비수열 a, b, c 의 공비를 r 이라 하면 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각 a, ar, ar^2 이다.
모서리의 길이의 총합은 $4(a + ar + ar^2) = 60$ 에서
 $a(1 + r + r^2) = 15 \cdots \textcircled{1}$
또, 겉넓이는 $2(a \cdot ar + a \cdot ar^2 + ar \cdot ar^2) = 180$ 에서
 $a^2r(1 + r + r^2) = 90 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 에서 $ar = 6$
따라서 직육면체의 부피 V 는
 $V = a \cdot ar \cdot ar^2 = a^3r^3 = (ar)^3 = 6^3 = 216$

21. 재진이가 첫날에 1원, 둘째날에 2원, 셋째날에 4원, ... 과 같이 매일 전날의 2배씩 30일간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

- ① $2^{30} - 2$ (원) ② $2^{30} - 1$ (원) ③ 2^{30} (원)
④ $2^{30} + 1$ (원) ⑤ $2^{30} + 2$ (원)

해설

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_{30} = \frac{1 \cdot (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1(\text{원})$$

22. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, ... 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

- ① $3^{30} - 2$ 원 ② $3^{30} - 1$ 원 ③ 3^{30} 원
④ $3^{30} + 1$ 원 ⑤ $3^{30} + 2$ 원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r = 3$

$a = 2, r = 3$

$$\therefore S_{30} = \frac{2 \cdot (3^{30} - 1)}{3 - 1} = 3^{30} - 1$$

23. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단, $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 $1000\text{만} \times (1.04)^1$
(10년후 원리합계)
 $= 1000\text{만} \times 1.04^{10}$
 $= 1000\text{만} \times 1.48$
 $= 1480\text{만 (원)}$

24. 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_n + p\}$ 가 등비수열을 이루도록 하는 상수 p 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2}, S_n + p = \frac{3^n - 1 + 2p}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{2p-1}{2}$$

그런데 $S_n + p$ 가 등비수열을 이루므로

$$\frac{2p-1}{2} = 0 \quad \therefore p = \frac{1}{2}$$

25. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$ 로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{1}$
따라서, $n \geq 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면
 $\textcircled{1}$ 이 $n = 1$ 일 때에도 성립해야 하므로
 $3 = 6 + k \quad \therefore k = -3$

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3, a_{n+1} = 2S_n$ 으로 정의될 때, a_{10} 의 값은? (단, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)

① $3 \cdot 2^8$

② $3 \cdot 2^9$

③ $3 \cdot 2^{10}$

④ $2 \cdot 3^9$

⑤ $2 \cdot 3^{10}$

해설

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{ 이므로 } S_{n+1} - S_n = 2S_n$$

즉, $S_{n+1} = 3S_n$ 이므로 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 3 인 등비수열이다.

$$\therefore S_n = 3^n$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = 3^{10} - 3^9 = 2 \cdot 3^9$$

해설

$$a_1 = 3, a_2 = 6$$

$$a_{n+1} = 2S_n \cdots \textcircled{1}, a_n = 2S_{n-1} \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 식에서 $\textcircled{2}$ 식을 빼보면,

$$a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n (\text{단, } n \geq 2)$$

$$a_{n+1} = 3a_n (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\text{따라서 } a_n = 3^{n-2} \cdot a_2 = 2 \cdot 3^{n-1} (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$$

27. 수열 3, 33, 333, 3333, ...의 일반항 a_n 을 구하여라.

① $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$

② $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)$

③ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

④ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

⑤ $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 2)$

해설

수열 9, 99, 999, 9999, ...에서

$$9 = 10^1 - 1, 99 = 10^2 - 1, 999 = 10^3 - 1, 9999 = 10^4 - 1, \dots$$

따라서 이 수열의 일반항은 $10^n - 1$ 이다.

수열 3, 33, 333, 3333, ...의 각 항은

$$3 = 9 \times \frac{1}{3}, 33 = 99 \times \frac{1}{3}, 333 = 999 \times \frac{1}{3}, \dots \text{이므로}$$

주어진 수열의 일반항은 $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$ 이다.

28. 수열 1, 11, 111, 1111, ... 에서 제100 항은?

① $\frac{10^{200} - 1}{9}$
④ $\frac{10^{200} - 1}{9}$

② $\frac{10^{100} - 1}{9}$
⑤ $10^{200} + 1$

③ $10^{100} + 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10 + 1$$

$$a_3 = 10^2 + 10 + 1$$

$\vdots$

$$a_n = 10^{(n-1)} + \cdots + 10^2 + 10 + 1$$

$$= \frac{1 \{10^n - 1\}}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{10^{100} - 1}{9}$$

29. 삼각형 ABC 에서 각 꼭짓점 A, B, C 에 대응하는 변 a, b, c 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

이 성질을 이용하여 변 a, b, c 가 이 순서로 등차수열을 이루고, $\sin A, \sin B, \sin C$ 는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$\sin A, \sin B, \sin C$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$\sin B = \sin A \times \sin C$$

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \frac{a}{2R} \times \frac{c}{2R} \therefore b^2 = ac$$

즉, a, b, c 는 이 순서로 등차수열도 이루고, 등비수열도 이룬다.
이런 경우는 세변의 길이가 같은 경우뿐이므로 삼각형 ABC 는 정삼각형이다.

30. 각 항이 서로 다른 자연수인 등비수열

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 에 대하여

$$P = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$Q = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5$$

$R = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$ 이라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $P^2 + Q^2 = R$ ② $P + Q = R$ ③ $PQ = R$
- ④ $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = R$ ⑤ $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{1}{R}$

해설

등비수열 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 의 공비를 r 이라 하면

$$P = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r}$$

$$Q = \frac{a_1(1-(-r)^5)}{1+r} = \frac{a_1(1+r^5)}{1+r}$$

$$R = \frac{a_1^2(1-r^{10})}{1-r^2} \text{ 이므로}$$

$$R = \frac{a_1^2(1-r^{10})}{1-r^2} = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} \times \frac{a_1(1+r^5)}{1+r} = PQ$$

31. 자연수 k 에 대하여 수열 $2^3 + 1, 2^4 + 3, 2^5 + 5, \dots, 2^k + 19$ 의 합을 S 라 할 때, $S + k$ 의 값은?

① $2^{12} + 92$

② $2^{12} + 108$

③ $2^{13} + 92$

④ $2^{13} + 104$

⑤ $2^{13} + 128$

해설

수열 $1, 3, 5, 7, \dots$ 의 제 n 항은 $2n - 1$ 이므로

$$2n - 1 = 19, 2n = 20, \therefore n = 10$$

이때, $k = 12$ 이므로

$$S = (2^3 + 1) + (2^4 + 3) + (2^5 + 5) + \dots + (2^{12} + 19)$$

$$= (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}) + (1 + 3 + 5 + \dots + 19)$$

$$= \frac{2^3(2^{10} - 1)}{2 - 1} + \frac{10(1 + 19)}{2}$$

$$= 2^{13} - 8 + 100 = 2^{13} + 92$$

$$\therefore S + k = 2^{13} + 92 + 12 = 2^{13} + 104$$

32. $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 곱을 $P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ 이라 하자. P_n 의 값이 최대일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a_n > 0$ 이고, $a_n \neq 1$ 이므로
 $a_{n+1} > 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} > P_n$,
즉, $P_{n+1} > P_n$
 $a_{n+1} < 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} < P_n$, 즉, $P_{n+1} < P_n$
따라서, $a_n > 1$ 인 마지막 항까지의 곱이 P_n 의 최댓값이다.
 $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1, 2^{n-1} < 3000$
 $2^{11} = 2048$ 이므로 $n - 1 = 11 \quad \therefore n = 12$

33. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음과 같이 정의되어 있다.
 $a_n = 2n + 1$, $b_n = 3n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$ 이라 한다. 이때, C_{20} 의 값을 구하여라.

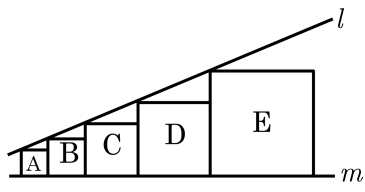
▶ 답 :

▷ 정답 : 119

해설

$a_2 = b_1 = 5$, $a_5 = b_3 = 11$, $a_8 = b_5 = 17, \dots$ 이므로 수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이다.
 $\therefore c_{20} = 5 + 19 \cdot 6 = 119$

34. 다음 그림과 같이 두 직선 l , m 사이에 5개의 정사각형 A, B, C, D, E가 서로 접해 있다. 정사각형 A와 E의 넓이가 각각 2, 32일 때, 나머지 정사각형 B, C, D의 넓이의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

주어진 정사각형 A, B, C, D, E의 넓이가 순서대로 등비수열을 이루므로 정사각형 A, E의 넓이가 각각 2, 32일 때, 정사각형 B, C, D의 넓이는 각각 4, 8, 16이 된다. 따라서, 구하는 정사각형 B, C, D의 넓이의 합은 $4 + 8 + 16 = 28$

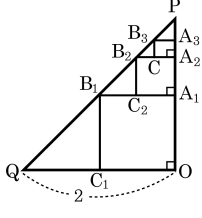
35. 매년 자동차에서 배출되는 매연의 양을 1950년부터 조사한 결과, 최근 10년 동안 배출된 매연의 양은 그 이전까지 배출된 매연의 양의 2배와 같다고 한다. 이와 같은 추세가 계속된다고 가정하고, 1960년까지 배출된 매연의 양을 A 라 할 때, 2031년부터 2040년까지 배출되는 매연의 양은?

- ① 3^7A
- ② 2×3^7A
- ③ 3^8A
- ④ 2×3^8A
- ⑤ 3^9A

해설

1960년까지 배출된 매연의 양이 A 이므로
1961년부터 1970년까지 10년 동안 배출된 매연의 양은 $2A$
1971년부터 1980년까지 10년 동안 배출된 매연의 양은 $2(A + 2A) = 6A$
1981년부터 1990년까지 10년 동안 배출된 매연의 양은 $2(A + 2A + 6A) = 18A$
⋮
이때, $2A, 6A, 18A, 54A, \dots$ 를 수열 $\{a_n\}$ 이라 하면
수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $2A$ 이고 공비가 3인 등비수열을 이룬다.
따라서 구하는 2031년부터 2040년까지 배출되는 매연의 양은
 $a_8 = 2A \times 3^7 = 2 \times 3^7A$

36. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2$ 인 직각이등변 삼각형 OPQ에 정사각형 $OA_1B_1C_1$ 을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 A_1PB_1 에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$ 를 내접시킨다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때 만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?



- ① $\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}$ ② $\frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$
 ③ $\left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$ ④ $\frac{4}{3}$
 ⑤ $\frac{4}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}$

해설

삼각형 OPQ는 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2$ 인 직각이등변삼각형이므로 내접시킨 정사각형의 한 변의 길이는 1이다. 즉, $\overline{OA_1} = 1$

마찬가지로 $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}$, $\overline{A_3A_4} = \frac{1}{4}, \dots$

이때, 정사각형의 넓이는 1^2 , $\left(\frac{1}{2} \right)^2$, $\left(\frac{1}{4} \right)^2, \dots$ 이므로 구하는

정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 1이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열

의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right\}$$

37. 퇴직금으로 받은 2억 원을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액을 연금형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 20년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은?(단, $1.05^{20} = 2.6$, 연이율 5%, 1년마다 복리로 계산한다.)
- ① 1625만원 ② 1734만원 ③ 2085만원
- ④ 2480만원 ⑤ 2600만원

해설

할부 계산과 마찬가지로 계산 시점은 20년 후 마지막 수령년도를 기준으로 계산한다.
매년 지급받을 연금을 a 만원이라 하면

$$20000 \times 1.05^{20} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$
$$20000 \times 2.6 = \frac{a(2.6 - 1)}{0.05}$$
$$\therefore a = \frac{20000 \times 2.6 \times 0.05}{1.6} = 1625(\text{만원})$$

38. 한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면 그 중에서 90만원을 연이율 $r\%$ 로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r 을 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.)

- ① $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 10^5$
② $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2 \times 10^5$
③ $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 3 \times 10^5$
④ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$
⑤ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 2 \times 10^5$

해설

연이율 5%의 5년 만기 정기예금 100만원에 대한 5년 후의 원리함계는 $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5$

대출 이율이 $r\%$ 인 대출금 90만원에 대한 5년 후의 원리함계는 $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5$

이 은행은 100만원의 정기예금에서 90만원을 대출하고 10만원의 예비비를 보관하고 있으므로 5년 후 20만원의 수익을 얻으려면 정기예금의 원리함계와 대출금의 원리함계의 차가 10만원이면 된다.

$$\therefore 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$$

39. 각 항이 복소수인 등비수열 $\{Z_n\}$ 에 대하여 $z_1 = 1$, $z_2 = a + bi$, $z_3 = a - bi$ (단, a, b 는 실수, $b > 0$)일 때, z_1 부터 z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 모든 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

해설

1, z_2 , z_3 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $z_2^2 = z_3$
즉, $(a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$ 이고

$b > 0$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

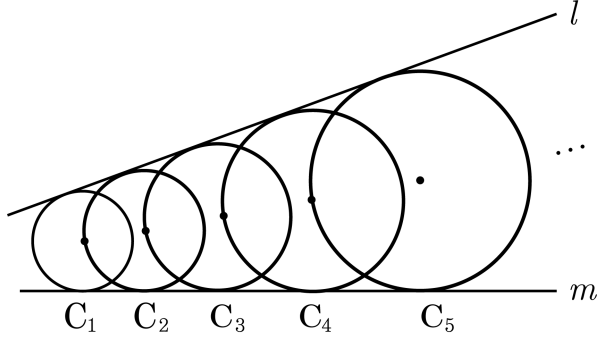
즉, $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, $z_3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$, $z_4 = 1, \dots$

이므로

$z_{3n-2} = 1 (n = 1, 2, 3, \dots, 67)$

따라서, z_1 부터 z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 합은 67이다.

40. 그림과 같이 두 직선 l, m 에 동시에 접하는 원 C_1 이 있다. 원 C_1 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_1 보다 큰 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_2 보다 큰 원을 C_3 라 하자. 이와 같은 방법으로 원 C_k 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_k 보다 큰 원을 C_{k+1} 이라 하자. ($k = 1, 2, 3, \dots$) 원 C_1 의 넓이가 1, 원 C_5 의 넓이가 4일 때, 원 C_{19} 의 넓이를 구하여라.

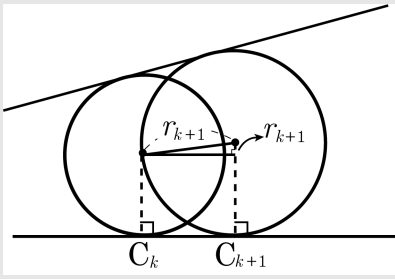


▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

원 C_k 의 반지름을 r_k , 넓이를 S_k , 원 C_{k+1} 의 반지름을 r_{k+1} , 넓이를 S_{k+1} 이라 하면,



$$\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} = p(\text{상수}), r_{k+1} = \frac{1}{1-p} r_k$$

수열 $\{r_k\}$ 가 등비수열이므로 수열 $\{S_k\}$ 도 등비수열이고, $\{S_k\}$ 의 공비를 a 라 하면

$$S_1 = 1, S_5 = a^4 = 4 \text{ 이므로 } a^2 = 2$$

$$\therefore S_{19} = a^{18} = 2^9 = 512$$