

1. 첫째항이 8, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n + 1$

② $-7n + 15$

③ $-7n - 15$

④ $7n + 15$

⑤ $7n - 15$

해설

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 15$$

2. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = 3n + 2$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -5, d = -3$

② $a = -5, d = 3$

③ $a = 5, d = -3$

④ $a = 5, d = 3$

⑤ $a = 5, d = 8$

해설

$$a_n = 3n + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5,$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = 3$$

3. 등차수열 $10, 6, 2, -2, -6, \dots$ 에서 공차를 d , 제 10 항을 b 라 할 때, $b + d$ 의 값은?

① -10 ② -20 ③ -30 ④ -40 ⑤ -50

해설

공차는 -4 이므로 $d = -4$

$$a_n = 10 + (n - 1)(-4) = -4n + 14$$

$$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26 \text{ 에서 } b = -26$$

$$\therefore b + d = -26 + (-4) = -30$$

4. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

-4, (가), 10, (나), (다)

- ① 1, 12, 14
- ② 3, 17, 24
- ③ 3, 17, 20
- ④ 7, 17, 24
- ⑤ 7, 13, 16

해설

-4와 10의 등차중항은 $\frac{-4+10}{2} = 3$, 이 수열의 공차는 7이다.
따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 3, 17, 24이다.

5. 세 수 4, x , -6 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

x 는 4와 -6 의 등차중항이므로
 $2x = 4 + (-6) = -2 \quad \therefore x = -1$

6. 첫째항이 -4 , 공차가 3 인 등차수열의 첫째항부터 제 17 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 340

해설

$$S_{17} = \frac{17 \{ 2 \cdot (-4) + (17 - 1) \cdot 3 \}}{2} = \frac{680}{2} = 340$$

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합 $S_{10} = 100$ 이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합 $S_{20} = 200$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

S_{10} 은 첫째항부터 제10까지의 합이고, S_{20} 은 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} &= S_{20} - S_{10} \\ &= 200 - 100 = 100 \end{aligned}$$

8. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 : a_9 = 2 : 5$ 일 때, a_{15} 의 값은?

① 40

② 43

③ 46

④ 49

⑤ 52

해설

첫째항을 a 라 하면 $a_n = a + (n - 1) \cdot 3$ 이므로

$a_4 = a + 9$, $a_9 = a + 24$

이때, $(a + 9) : (a + 24) = 2 : 5$ 에서

$5(a + 9) = 2(a + 24)$

$\therefore a = 1$

$\therefore a_{15} = 1 + (15 - 1) \cdot 3 = 43$

9. 등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차를 d 로 놓으면
305는 제 102항이므로

$$305 = 2 + (102 - 1)d$$

$$\therefore d = \frac{303}{101} = 3$$

10. 두 수 48과 2 사이에 10 개의 수 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 을 넣어 12 개의 수 48, $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2$ 가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48 이고 제 12 항이 2 인 등차수열의 첫째항부터 제 12 항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2} = 300$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 300 - (48 + 2) = 300 - 50 = 250$$

11. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, α, β 의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6$ 이므로 α, β 의 등차중항은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

12. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$ 가 성립할 때, a_6 의 값은?

① 5

② 8

③ 11

④ 13

⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4 는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d 라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$ 이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore d = 3$

$\therefore a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

13. 세 수 $5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 등차수열을 이루면 $4 - x$ 가 등차중항이므로

$$4 - x = \frac{(5 - 2x) + (6 + 3x)}{2}$$

$$2(4 - x) = 5 - 2x + 6 + 3x$$

$$8 - 2x = 11 + x$$

$$-3x = 3 \quad \therefore x = -1$$

14. 세 수 $-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 1

해설

$-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 등차수열을 이루면 $5 + x$ 가 등차중항
이므로

$$2(5 + x) = -7 + 2x + 5 - 4x$$

$$4x = -12$$

$$\therefore x = -3$$

15. 수열 $a, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, b, \dots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$\text{공차를 } d \text{ 라 하면 } d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

16. $a, -6, b, -12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

b 는 -6 과 -12 의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3 인 등차수열이다.

$$a + (-3) = -6 \text{에서 } a = -3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

17. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n - 1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, \quad 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제 10 항이다.

18. 첫째항이 -43 , 공차가 7 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8 항

② 제 9 항

③ 제 10 항

④ 제 11 항

⑤ 제 12 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$7n - 50 > 0, \quad 7n > 50$$

$$\therefore n > \frac{50}{7} = 7.14 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

19. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$ 의 값은?

① 12

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 120 \quad \therefore 2a + 9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a + 3d) + (a + 6d) = 2a + 9d = 24$$

20. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$$

$$2a + 23d = 36$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} &= \frac{24(2a + 23d)}{2} \\ &= 12 \times 36 \\ &= 432\end{aligned}$$

21. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$$

$$\therefore 4a + 48d = 32$$

$$a + 12d = 8$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

22. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

23. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

24. 집합 {2, 4, 6, 8, 10, 12}에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow$ 등차수열

- ① 공차가 2인 경우 (4가지)
2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12
② 공차가 4인 경우 (2가지)
2, 6, 10 4, 8, 12

25. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 제 50 항의 값은?

2, 7, 12, 17, 22...

- ① 227 ② 237 ③ 247 ④ 257 ⑤ 267

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 5인
등차수열이므로 $a_n = 5n - 3$
 $\therefore a_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$

26. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 2 : 3$ 가 성립할 때, $a_1 : a_8$ 는? (단, $a \neq 0$ 이다.)

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 5

해설

$$\begin{aligned}3(a_1 + a_2) &= 2(a_3 + a_4) \\3(a + a + d) &= 2(a + 2d + a + 3d) \\6a + 3d &= 4a + 10d \\2a &= 7d \\a_1 : a_8 &= a : (a + 7d) \\&= a : 3a = 1 : 3\end{aligned}$$

27. $a_5 = 27$, $a_{11} = 15$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 27$$

$$a_{11} = a + 10d = 15$$

연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 35$

$$\therefore a_n = 35 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 37$$

$-2n + 37 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$37 < 2n, \quad 18.5 < n$$

$$\therefore n = 19$$

$\therefore \{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19} 이다.

29. 공차가 $d_1 (d_1 \neq 0)$ 인 등차수열
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 에 대하여 두 수열
 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, \dots$
 $a_1 + a_2 + a_3, a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9, \dots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3
라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① $2d_2 = 3d_3$ ② $3d_2 = 2d_3$ ③ $5d_2 = 2d_3$
④ $7d_2 = 3d_3$ ⑤ $9d_2 = 4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1 + d_1, 2a_1 + 5d_1, 2a_1 + 9d_1, \dots$ 이므로 공차가 $d_2 = 4d_1$ 이고
둘째 수열은 $3a_1 + 3d_1, 3a_1 + 12d_1, 3a_1 + 21d_1, \dots$ 이므로
공차가 $d_3 = 9d_1$ 이다.
 $\therefore 9d_2 = 4d_3$

30. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1, a_5 = b_7, b_{22} = 10$ 일 때, $a_k = 10$ 을 만족시키는 양의 정수 k 의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

- ① 12
- ② 14
- ③ 15
- ④ 21
- ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$ 의 공차를 $x, \{b_n\}$ 의 공차를 y 라 하면
 $a_n = a_1 + (n - 1)x$
 $b_n = b_1 + (n - 1)y$
 $a_1 + 4x = b_1 + 6y$
 $\therefore y = \frac{2}{3}x$
 $b_{22} = b_1 + 21y = 10$
 $a_k = a_1 + (k - 1)x = 10$
 $a_1 = b_1$ 이므로 $a_1 = 10 - 21y$
 $10 - 21y + (k - 1)x = 10$
 $y = \frac{2}{3}x$ 이므로
 $10 - 14x + (k - 1)x = 10$
 $-14x + (k - 1)x = 0$
 $(k - 15)x = 0$
(i) $x \neq 0$ 일 때, $k = 15$
(ii) $x = 0$ 일 때 $y = 0$ 이므로 $b_{22} = \cdots = b_1 = 10$
 $b_1 = a_1$ 이므로 $a_1 = 10$
그런데 $a_1 \neq 10$ 이 아니므로
 $x = 0$ 이 될 수 없다.
 $\therefore k = 15$

31. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 $a_3+a_6+a_9=9$, $a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$ 일 때, $a_k=15$ 를 만족하는 k 의 값은?

- ① 10
- ② 12
- ③ 15
- ④ 18
- ⑤ 20

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_3+a_6+a_9=9$ 에서

$(a+2d)+(a+5d)+(a+8d)=9$

$3a+15d=9 \quad \therefore a+5d=3 \cdots \textcircled{1}$

$a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{14}=99$ 에서

$\frac{9\{(a+5d)+(a+13d)\}}{2}=99$

$\therefore a+9d=11 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $d=2$, $a=-7$

$\therefore a_n=-7+(n-1)\cdot 2=2n-9$

따라서 $a_k=2k-9=15$ 에서

$2k=24 \quad \therefore k=12$

32. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

33. 50과 100 사이의 자연수 중 3의 배수의 총합은?

- ① 1176 ② 1200 ③ 1225 ④ 1275 ⑤ 1300

해설

50 ~ 100사이의 3의 배수는
51에서 시작하여 99로 끝나는
공차가 3인 등차수열이므로

$$\frac{(33 - 17 + 1)(51 + 99)}{2}$$
$$= \frac{17 \cdot 150}{2} = 1275$$

34. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 20이고, 공차는 d 인 정수일 때, $a_7 \cdot a_8 < 0$ 을 만족한다. 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $S_n > 0$ 을 만족하는 n 의 최댓값은?

- ① 10
- ② 11
- ③ 12
- ④ 13
- ⑤ 14

해설

$\{a_n\}$ 이 등차수열이고 첫째항이 양수이므로

$$a_7 \cdot a_8 < 0 \text{에서 } a_7 > 0, a_8 < 0$$

$$a_7 = 20 + 6d > 0, a_8 = 20 + 7d < 0$$

이때 공차 d 는 정수이므로 $d = -3$

$S_n > 0$ 을 만족해야 하므로

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2} > 0$$

$$n(43 - 3n) > 0, n(3n - 43) < 0$$

$$\therefore 0 < n < \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$$

35. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 11$, $a_{14} = -11$ 일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 의 최댓값은?

① 56 ② 62 ③ 64 ④ 68 ⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 11$ 에서 $a + 2d = 11 \cdots \textcircled{㉠}$

$a_{14} = -11$ 에서 $a + 13d = -11 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 15$

$\therefore a_n = 15 + (n - 1) \cdot (-2) = -2n + 17$

이때 S_n 이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로 $-2n + 17 > 0$ 에서

$$2n < 17 \quad \therefore n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n 의 최댓값은 S_8 이므로

$$S_8 = \frac{8\{2 \cdot 15 + 7 \cdot (-2)\}}{2} = 64$$

36. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$$

$$= 2 \cdot \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$$

$$= 24 + 260 = 284$$

37. 첫째항이 100이고, 공차가 -3 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$$\begin{aligned}a_n &= 100 + (n - 1) \cdot (-3) \\&= -3n + 103 > 0 \\n &< 34.333 \cdots \\\therefore n &= 34 \text{ 일 때 최대}\end{aligned}$$

38. 첫째 날에 100 원, 둘째 날에 110 원, 셋째 날에 120 원 ... 과 같이 매일 10 원씩 늘려 30 일간 저금통에 넣으면 적립한 총액은?

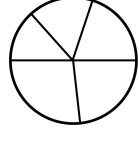
① 6450 ② 7350 ③ 7450 ④ 8250 ⑤ 8450

해설

$$a = 100, d = 10$$

$$S_{30} = \frac{30 \{2 \times 100 + (30 - 1) \cdot 10\}}{2} = 7350$$

39. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 라 하면

$$2(a - 2d) = a + 2d$$

$$2a - 4d = a + 2d$$

$$a = 6d$$

$$\therefore 4d, 5d, 6d, 7d, 8d$$

$$\text{그런데 } \frac{5(4d + 8d)}{2} = 15^2\pi$$

$$6d = 45\pi$$

$$d = \frac{15}{2}\pi$$

$$\therefore 8d = 8 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi$$

$$\therefore k = 60$$

40. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$ 가 성립할 때, $a_4 : a_7$ 는? (단, $a_1 \neq 0$ 이다.)

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 5

해설

$$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$$

$$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$$

$$2a + 5d = 4a + 2d$$

$$3d = 2a$$

$$\begin{aligned}\therefore a_4 : a_7 &= (a + 3d) : (a + 6d) \\ &= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a \\ &= 3 : 5\end{aligned}$$

42. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 제 n 항까지의 합을 각각 A_n , B_n 이라 한다.
 $A_n : B_n = (3n + 6) : (7n + 2)$ 일 때, $a_7 : b_7$ 을 구하면? (단, n 은 자연수)

① 5 : 17

② 15 : 31

③ 17 : 9

④ 31 : 15

⑤ 49 : 50

해설

a_n 의 일반항을 $a + (n - 1)d_1$

b_n 의 일반항을 $b + (n - 1)d_2$ 로 놓으면

$$A_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d_1\},$$

$$B_n = \frac{n}{2} \{2b + (n - 1)d_2\}$$

$$\frac{2a + d_1n - d_1}{2b + d_2n - d_2} = \frac{3n + 6}{7n + 2} = \frac{3kn + 6k}{7kn + 2k},$$

$$d_1 = 3k, \quad 2a - d_1 = 6k(k \text{는 비례상수})$$

$$\text{따라서 } 2a = 9k, \quad a = \frac{9}{2}k$$

$$\therefore a_n = \frac{9}{2}k + (n - 1)3k$$

$$d_2 = 7k, \quad 2b - d_2 = 2k, \quad b = \frac{9}{2}k$$

$$\therefore b_n = \frac{9}{2}k + (n - 1)7k$$

$$\therefore a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k + 18k\right) : \left(\frac{9}{2}k + 42k\right)$$

$$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$$

43. 4와 6으로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 41400

해설

4와 6으로 나누어떨어지는 수는 4와 6의 최소공배수인 12로 나누어떨어지는 수이므로 $12n$ (n 은 자연수)의 꼴이다.

이때, $100 \leq 12n \leq 1000$ 이므로

$$8.\times\times \leq n \leq 83.\times\times$$

$$\therefore n = 9, 10, 11, \dots, 83$$

그런데 $n = 9$ 일 때, $12n = 108$,

$n = 83$ 일 때, $12n = 996$ 이므로 조건을 만족하는 수는 첫째항이 108, 끝항이 996, 항수가 $83 - 8 = 75$ 인 등차수열이다.

$$\text{따라서 구하는 총합은 } \frac{75(108 + 996)}{2} = 41400$$

44. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $-5 < d < -4$
㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$
㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$
 $S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$
 $10 - 2d + 4d > 0$
 $\therefore d > -5$
 $S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$
 $2(10 - 2d) + 9d < 0$
 $\therefore d < -4$
 $\therefore -5 < d < -4$ (참)
㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$
㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로
 $0 < 10 + 2d < 2$
즉, $0 < a_5 < 2$
 $a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$
 $-15 < 3d < -12$ 이므로
 $-5 < 10 + 3d < -2$
즉, $-5 < a_6 < -2$
 $\therefore a_5 > 0$, $a_6 < 0$ (참)
㉢ $a_1 = 10 - 2d$ 이므로
 $-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$
즉, $18 < a_1 < 20$
 a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$
 $a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\frac{9}{2}$
 $\therefore a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$
 $\therefore a_1 + a_9 = 2 \neq 0$ (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

45. 첫째항이 50 이고, 공차가 -4 인 등차수열은 첫째항부터 몇 제항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13 번째 항

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \{ 2 \cdot 50 + (n-1) \cdot (-4) \}}{2} \\ &= \frac{n(100 - 4n + 4)}{2} \\ &= \frac{n(-4n + 104)}{2} \\ &= n(-2n + 52) \\ &= -2n^2 + 52n \\ &= -2(n^2 - 26n + 13^2 - 13^2) \\ &= -2(n - 13)^2 + 2 \times 13^2 \end{aligned}$$

$\therefore n = 13$ 일 때 최대

46. 수학자 드 브와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

드 브와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 브와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은?

- ① 197 ② 205 ③ 214 ④ 224 ⑤ 235

해설

이 사실을 알게 된 날을 첫째 날로 하여 드 브와브르가 깨어 있는 시간을 수열 $\{a_n\}$ 이라고 하면 a_n 은 $a_1 = 10$ (시간)이고 공차가 $-\frac{1}{4}$ (시간)인 등차수열이다.

24시간 계속 수면하게 되는 날은 깨어 있는 시간이 0시간이므로

$$a_n = 10 - \frac{1}{4}(n - 1) = 0$$

$$\therefore n = 41$$

$$\therefore \text{깨어있는 시간의 합은 } \frac{41(10 + 0)}{2} = 205(\text{시간}) \text{이다.}$$