

1. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^3 - b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① $a^3 + b^3$

② $a^6 + b^6$

③ $a^6 - b^6$

④ $a^9 + b^9$

⑤ $a^9 - b^9$

해설

(준 식) $= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = a^6 - b^6$

2. 다음 식이 x 에 대한 항등식이 되도록 A, B 의 값을 정할 때, $A + B$ 의 값을 구하여라.

$$4x - 6 = A(x + 1) - B(x - 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x 에 대한 항등식이므로 x 의 값에 관계없이 항상 성립한다.
따라서 $x = -1$ 을 양변에 대입하면,
 $4 \times (-1) - 6 = A(-1 + 1) - B(-1 - 1)$
 $-10 = 2B \quad \therefore B = -5$
또, $x = 1$ 을 양변에 대입하면,
 $4 \times 1 - 6 = A(1 + 1) - B(1 - 1)$
 $-2 = 2A \quad \therefore A = -1$
 $\therefore A = -1, B = -5$
 $\therefore A + B = -6$

해설

우변을 전개해서 내림차순으로 정리하면,
 $4x - 6 = (A - B)x + A + B$
 $\therefore A + B = -6$

3. 임의의 실수 x, y 에 대하여, $(x+y)a^2 + (x-y)b = 4x+y$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$

② $\frac{15}{4}$

③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{19}{4}$

⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$$(a^2 + b)x + (a^2 - b)y = 4x + y$$

$$a^2 + b = 4 \cdots \textcircled{1}, a^2 - b = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{19}{4}$$

4. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bx+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$
 $\therefore a=1, b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

5. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & (x + 1)(y + 1)(z + 1) \\ &= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

6. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $ab + bc + ca = 9$, $a + b + c$ 의 값은?

① $-3\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{3}$

③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ &= 9 + 18 = 27\end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c = \pm 3\sqrt{3}$$

7. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

8. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$
이것은 k 에 대한 항등식이므로
 $2x + 3y + 5 = 0$
 $3x - y - 9 = 0$
연립방정식을 풀면 $x = 2, y = -3$
 $\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$

9. a, b 는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$ 이 $x^2 - x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, b 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$$ax^3 + bx^2 + 1$$

$$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$$

$$= ax^3 - (1+a)x^2 + (1-a)x + 1$$

양변의 계수를 비교하면

$$-(1+a) = b, 1-a = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

10. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 8
- ② 15
- ③ 24
- ④ 36
- ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

- ㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
 $x=1$ 대입, $a=0$
- ㉡ 상수항 구하기
 $x=0$ 대입, $b=24$

11. 다항식 $(x^2 + 2x - 3)(3x^2 + x + k)$ 의 전개식에서 일차항의 계수가 15일 때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

해설

상수항과 일차항만의 곱을 구하면,

$$-3x + 2kx = 15x$$

$$\therefore k = 9$$

12. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,
 $x = 0$ 일 때, $-1 = C$
 $x = 1$ 일 때, $5 = 1 + A + B + C$
 $x = 2$ 일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
 $A = -6, B = 11, C = -1$

13. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$
위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
 $\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

14. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$

15. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= -1 - 3 \cdot (-1) = 2$$