

1. 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \dots$ 의 제 15 항까지의 합은?

① $\sqrt{14} - 1$

② $\sqrt{15} - 1$

③ 3

④ $\sqrt{15} + 1$

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \\ &= -\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1}) \\ &= -\{(1-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}) + \dots\} \\ &\quad - \{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\} \\ &= -(1-\sqrt{16}) = \sqrt{16}-1 = 4-1 = 3 \end{aligned}$$

2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{n}{2n+1}$

④ $\frac{n}{n+2}$

⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{준 식)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right\} + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

④ $\frac{n}{2n+1}$

⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right\}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

4. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \frac{n(1-x^n)}{2}$

② $S = \frac{1-x^n}{2}$

③ $S = \frac{1-x^n}{2} - \frac{2x^n}{x}$

④ $S = \frac{1-x^n}{1+x} - \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x 를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -) xS &= \quad x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

5. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

6. 자연수 n 이하의 모든 수의 곱을 $n!$ 로 나타낸다. 예를 들어 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 이다. 이때, $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{10}{11!}$ 의 값은?

① $\frac{9}{10!}$

② $\frac{10}{11!}$

③ $1 - \frac{1}{10!}$

④ $1 - \frac{1}{11!}$

⑤ $1 - \frac{1}{12!}$

해설

일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ 이다.

여기서 분자를 변형하면 부분분수의 꼴로 바꿀 수 있다.

$$\text{즉, } \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{10}{11!}$$

$$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10!} - \frac{1}{11!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{11!}$$