1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$

3. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$ 의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\dfrac{1}{a_1} = 3,\ \dfrac{1}{a_2} = 6$ 이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n,\ a_n = \dfrac{1}{3n}$

$a_3 = \dfrac{1}{9},\ a_4 = \dfrac{1}{12} \quad \therefore\ a_3 + a_4 = \dfrac{7}{36}$

4. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

5. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다.
> (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(나)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k　　② 0, $k+1$　　③ 0, $k-1$

④ 1, k　　⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{1})$이 참이다.

(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{k+1})$도 참이다.

6. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$에서 n대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2^1 a_1$

$a_3 = 2^2 a_2$

$a_4 = 2^3 a_3$

$\vdots$

$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$

$\therefore\ a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_{10} = 2^{50}$이므로 $2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$

$a_1 = 2^5 = 32$

7. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
양변에 (㉠)^3 을 더하면
$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
$= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$
$= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$
따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$
$\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$
$\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$