

1. 아래 표는 식품A 1kg 과 식품B 1kg 에 들어 있는 단백질과 철분의 양을 나타낸 것이다.

	단백질 (g)	철분 (mg)
식품A	300	12
식품B	200	36

어떤 사람이 하루에 섭취해야 하는 영양소 중 단백질과 철분의 양은 각각 100g, 12mg 이라 한다. 식품 A 는 1kg 에 2000 원, 식품 B 는 1kg 에 2500 원일 때, 이 사람이 식품 A 와 식품 B 만으로 하루에 필요한 단백질과 철분을 섭취하는데 드는 최소비용은?

- ① 1000 원
- ② 1200 원
- ③ 1250 원
- ④ 1500 원
- ⑤ 2000 원

해설

식품 A 의 양을 x kg, 식품 B 의 양을 y kg라 하면 단백질과 철분의 양은 각각 $300x + 200y$, $12x + 36y$ 이다.
따라서 주어진 조건에 의해 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 이고,

$$\begin{cases} 300x + 200y \geq 100 \\ 12x + 36y \geq 12 \end{cases}$$

$2000x + 2500y = k$ 라 놓으면
다음그림에서 두 직선의 교점을 지날 때,
최소가 된다.
교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$ 이므로 최소비용은 1000 원이다.

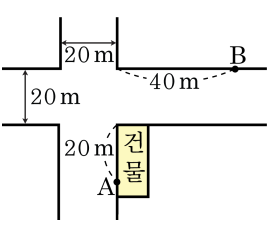
2. 세 점 A(2, 3), B(3, 0), C(4, 1) 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle C$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 D(a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 15

해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해
 $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \sqrt{2}$ 에서
 $\overline{AD} : BD = \overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 이다.
따라서 점 D는 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이므로
 $D(a, b) = \left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2 + 1} \right) = \left(\frac{8}{3}, 1 \right)$
 $\therefore 3ab = 8$

3. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)
- ① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$
 ④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$



해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는 좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는

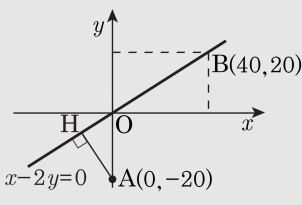
각각 $(0, -20)$, $(40, 20)$ 이다. 이 때, 원점과

점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x - 2y = 0$

이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할

최소거리는 점 A 와 직선 $x - 2y = 0$

사이의 거리이다. $\therefore \overline{AH} = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot (-20)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 8\sqrt{5}$



4. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선이 점 $(a, -1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(a, -1)$ 라 하면
점 P 에서 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리가
같으므로

$$d = \frac{|2a + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$|2a| = |a - 3|$$

$$\therefore 2a = a - 3 \text{ 또는 } 2a = -(a - 3) \text{ 이므로}$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\text{따라서 } a \text{ 의 값의 합은 } -3 + 1 = -2$$

5. 이차곡선 $x^2 + y^2 + ax + by + 7 = 0$ 이 반지름 1 인 원을 표시한다. 이
원의 중심 a, b 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 28}{4}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - 28}{4} = 1 \text{ 에서}$$

$$a^2 + b^2 = 32 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{중심 } \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ 에서}$$

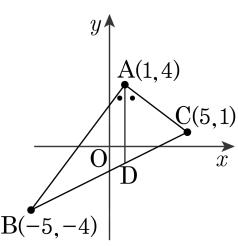
$$x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2} \text{ 이므로}$$

$$a = -2x, b = -2y \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면}$$

$$4x^2 + 4y^2 = 32 \quad \therefore x^2 + y^2 = 8$$

$$\therefore 2\pi r = 4\sqrt{2}\pi$$

6. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

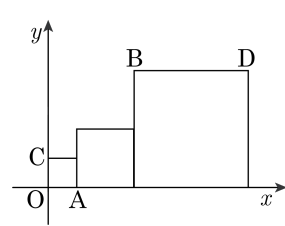
두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 1$$

7. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 C(0, 4), 점 D(21, 12)일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



- ① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로
점 A(4, 0) 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로
점 B(21 - 12, 12)
즉, B(9, 12)
∴ $\overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

8. x, y 가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 의
최솟값은?

- ① $\sqrt{5}$
- ② $2\sqrt{5}$
- ③ $\sqrt{6}$
- ④ $2\sqrt{6}$
- ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

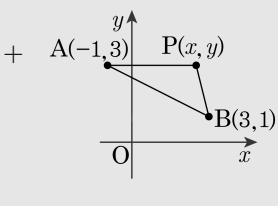
$= \overline{AP} + \overline{BP}$ 를 의미 하므로

$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$

그러므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

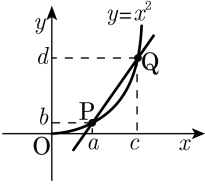
$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{5}$

+



9. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)

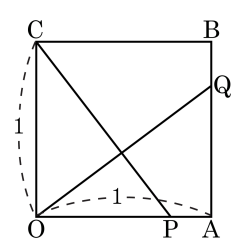
- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$



해설

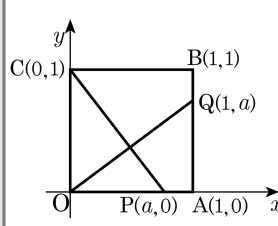
점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$
 즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ ($\because 0 < a < c$)
 $(\overline{PQ} \text{의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a}$
 $= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a}$
 $= c+a = \sqrt{d} + \sqrt{b} = 2$

10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 OABC의 두 변 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 위에 각각 점 P, Q를 $\overline{OP} = \overline{AQ}$ 가 되도록 잡을때, $(\overline{CP}$ 의 기울기) $\times$ $(\overline{OQ}$ 의 기울기)를 구하면?
- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $\frac{1}{2}$
 ④ 1 ⑤ 2



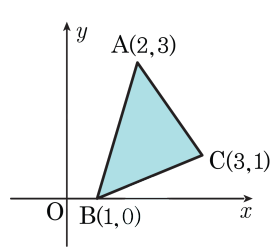
해설

정사각형 OABC에 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 $(\overline{CP}$ 의 기울기) $= \frac{-1}{a}$,
 $(\overline{OQ}$ 의 기울기) $= \frac{a}{1}$
 따라서, 두 직선의 기울기의 곱은
 $\left(\frac{-1}{a}\right) \times \left(\frac{a}{1}\right) = -1$



11. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

- ① $-1 \leq m \leq 3$ ② $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$
 ③ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ ④ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$
 ⑤ $1 \leq m \leq 3$



해설

직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x + 1) + y - 2 = 0$ 이므로

점 $P(-1, 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 $\triangle ABC$ 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

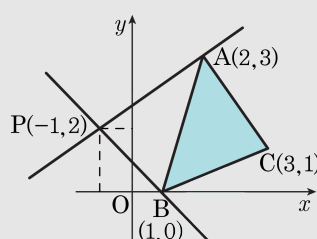
(직선 PB 의 기울기) $\leq -m \leq$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2} = \frac{1}{3}$

$-1 \leq -m \leq \frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$



12. 두 직선 $y = -x + 3$, $y = mx + m + 2$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

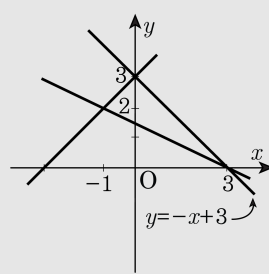
$m(x+1) - (y-2) = 0$ 에서 $y = mx + m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 $(-1, 2)$ 를 지난다.

$(3, 0)$ 을 지날때 $m = -\frac{1}{2}$

$(0, 3)$ 을 지날때 $m = 1$

$\therefore -\frac{1}{2} < m < 1$

따라서 $2\alpha + \beta = 0$



13. 두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
- ㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 60° 이다.
- ㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 의 자취는 (0,0) 과 (-4,0) 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
 $\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA) = \frac{2}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$ 에서 $\angle PBA = 30^\circ$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

14. 두 원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 가 서로 외접할 때, 점 (a, b) 가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?
- ① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.
 - ② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$ 이다.
 - ③ 두 종류의 두형이 나타난다.
 - ④ 이 도형의 길이는 10π 이다.
 - ⑤ 원점을 지나는 원이다.

해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.

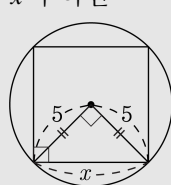
원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$ 에서 중심은 $(a, 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 에서 중심은 $(0, b)$, 반지름은 3이다.

따라서, $(a, 0)$ 과 $(0, b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$
 $\therefore a^2 + b^2 = 25$

그러므로 구하려는 자취는 $x^2 + y^2 = 25$

① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를

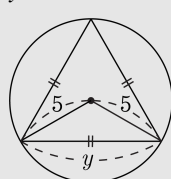
x 라 하면



$$2x^2 = 10^2 \therefore x = 5\sqrt{2}$$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를

y 라 하면



$$y = \frac{5}{2}\sqrt{3} \times 2 = 5\sqrt{3}$$

$\therefore y = 5\sqrt{3}$ 이다.

15. 원 $O : x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원을 O' 이라고 하자. 두 원 O, O' 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6, 2)$ 를 직선 AB 에 대하여 대칭이동한 점이 (a, b) 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① -8 ② -12 ③ 8 ④ 12 ⑤ 0

해설

원 $O : x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$O' : (x + 1)^2 + y^2 = 1$$

두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면

$$O : x^2 + y^2 - 2y = 0, O' : x^2 + y^2 + 2x = 0$$

이 때, 직선 AB 의 방정식은 $2x + 2y = 0$,

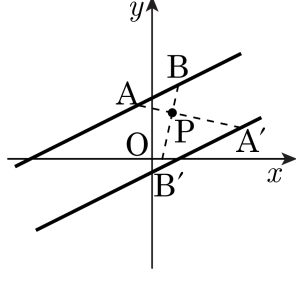
$$\text{즉 } y = -x$$

따라서 점 $(6, 2)$ 를 직선 $y = -x$ 에 대하여

대칭이동한 점은 $(-2, -6)$ 이므로

$$a = -2, b = -6 \therefore ab = 12$$

16. 좌표평면 위의 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점은 각각 A', B'이고, 직선 AB의 방정식은 $x - 2y + 4 = 0$ 이라 한다. 점 A'의 좌표가 (3, 1), 직선 A'B'의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?



- ① $-\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

두 점 A', B'은 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점이므로, 직선 A'B'은 직선 AB의 점대칭도형이다

$\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각)이므로

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ 이다.

따라서 직선 A'B'의 기울기는 직선 AB의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또한, 직선 A'B'은 A'(3, 1)을 지나므로

직선 A'B'의 방정식은

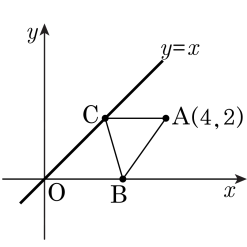
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore ab = -\frac{1}{4}$$

17. 다음 그림과 같이 점 A(4, 2)와 x 축과 직선 $y = x$ 위에 각각 두 점 B, C가 있다. 이때, $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하면?

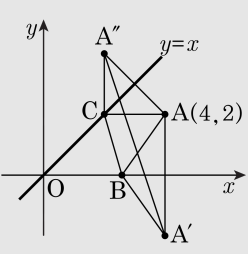


- ① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{2}$
 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

점 A(4, 2)를 x 축에 대칭이동한 점 A'(4, -2)와

$y = x$ 에 대칭이동한 점 A''(2, 4)를 구하여 연결하면 다음 그림에서

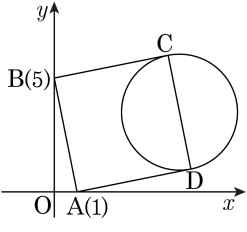


$$\begin{aligned}
 (\triangle ABC \text{의 둘레}) &= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} \\
 &= \overline{A'B} + \overline{A''C} + \overline{BC} \geq \overline{A'A''}
 \end{aligned}$$

점 B와 C를 직선 A'A''이 각각 x 축과 직선 $y = x$ 와 만나는 점으로 잡을 때, $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이가 최소이다.

이 때, 최솟값은 $\sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$ 이다.

18. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 제 1 사분면에 정사각형 ABCD 가 있다. A(1,0), B(0,5) 일 때, 변 CD 를 지름으로 하는 원의 방정식은?



- ① $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ② $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ③ $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ④ $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ⑤ $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

해설

정사각형이므로,

B → A : x 축으로 1, y 축으로 -5 이면

A → D : x 축으로 5, y 축으로 1 을 이동한다.

∴ D(6,1)

마찬가지로 적용하면, C = (5,6)

∴ 원의 중심 : $\left(\frac{6+5}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$

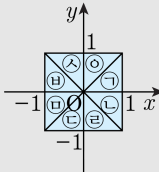
반지름은 $\frac{\sqrt{1^2 + 5^2}}{2}$

⇒ $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

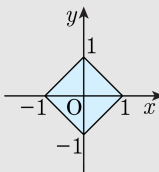
19. 양수 a, b 에 대하여 $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$ (단, $\max\{a, b\}$ 는 a, b 중 작지 않은 수), $|x| + |y| \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ 일 때, A, B, C 중 나타내는 영역의 넓이가 가장 큰 것은?

- ① A ② B ③ C
 ④ 모두 같다. ⑤ 구할 수 없다.

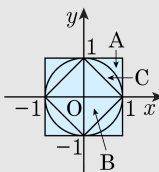
해설



$A = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ 에서
 (i) $|x| \geq |y|$ 일 때, $|x| \leq 1$, 즉 $|y| \leq |x| \leq 1$ 에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 이면 $y \leq x \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $x \geq 0, y < 0$ 이면 $-y \leq x \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $x < 0, y \geq 0$ 이면 $y \leq -x \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉢}}$
 $x < 0, y < 0$ 이면 $-y \leq -x \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉣}}$



(ii) $|x| < |y|$ 일 때, $|y| \leq 1$, 즉 $|x| < |y| \leq 1$ 에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 이면 $x \leq y \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉤}}$
 $x \geq 0, y < 0$ 이면 $x < -y \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉥}}$
 $x < 0, y \geq 0$ 이면 $-x < y \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉦}}$
 $x < 0, y < 0$ 이면 $-x \leq -y \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉧}}$



(i), (ii) 에서 A 의 영역은 다음의 그림과 같다.

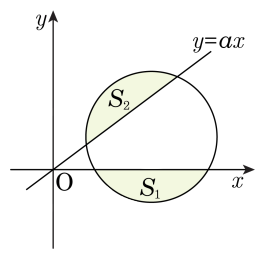
20. x, y 에 대한 부등식 $(x^2 + y^2)m + x + y \geq 4m$ 이 m 의 모든 실수값에 대하여 성립할 때, (x, y) 가 그리는 도형의 길이는?

- ① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 6π

해설

$(x^2 + y^2 - 4)m + x + y \geq 0$ 에서
 m 의 모든 실수값에 대하여 항상 성립할 조건은
 $x^2 + y^2 - 4 = 0, x + y \geq 0$
따라서 $x^2 + y^2 = 4$ 의 둘레 중
 $x + y \geq 0$ 의 부분이다.
 $\therefore \frac{1}{2} \times 4\pi = 2\pi$

21. 아래 그림에서 원 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

$S_1 = S_2$ 이면, 중심 $(3, 1)$ 에서
 직선 $y = ax$ 까지 거리는 1 이다.
 따라서 $1 = \frac{|3a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$ 이고 $a = \frac{3}{4}$ 이다.
 $\therefore 100a = 75$