1. 아래 표는 식품A 1 kg 과 식품B 1 kg 에 들어 있는 단백질과 철분의 양을 나타낸 것이다.

	단백질 (g)	철분 (mg)
식품A	300	12
식품B	200	36

어떤 사람이 하루에 섭취해야 하는 영양소 중 단백질과 철분의 양은 각각 100 g, 12 mg 이라 한다. 식품 A 는 1 kg 에 2000 원, 식품 B 는 1 kg 에 2500 원일 때, 이 사람이 식품 A 와 식품 B 만으로 하루에 필요한 단백질과 철분을 섭취하는데 드는 최소비용은?

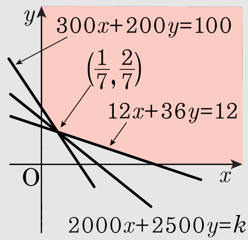
① 1000 원 ② 1200 원 ③ 1250 원
④ 1500 원 ⑤ 2000 원

해설

식품 A 의 양을 x kg, 식품 B 의 양을 y kg라 하면 단백질과 철분의 양은 각각 $300x+200y$, $12x+36y$ 이다.
따라서 주어진 조건에 의해 $x \ge 0$, $y \ge 0$ 이고,

$$\begin{cases} 300x+200y \ge 100 \\ 12x+36y \ge 12 \end{cases}$$

$2000x+2500y=k$ 라 놓으면
다음그림에서 두 직선의 교점을 지날 때,
최소가 된다.
교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$ 이므로 최소비용은 1000 원이다.



2. 세 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{C}(4,1)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 $\angle\mathrm{C}$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 $\mathrm{D}(a,b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① 3　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 15

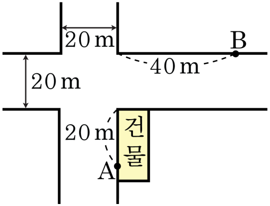
해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ 에서
$\overline{\mathrm{AD}} : \mathrm{BD} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : 1$ 이다.
따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{D}(a,b) = \left(\frac{2\times3+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right) = \left(\frac{8}{3},\ 1\right)$$

$\therefore\ 3ab = 8$

3. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)

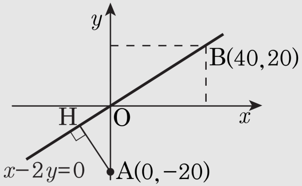


① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$

④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각$(0, -20)$, $(40,\ 20)$ 이다. 이때, 원점과
점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$



사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{|1\cdot 0-2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=8\sqrt{5}$

4. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각을이등분하는 직선이 점 $(a,-1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8　　② -6　　③ -4　　④ -2　　⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ -1)$ 라 하면
점 P 에서 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 까지의 거리가
같으므로

$$d=\frac{|2a+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$|2a|=|a-3|$

$\therefore\ 2a=a-3$ 또는 $2a=-(a-3)$ 이므로

$a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

5. 이차곡선 $x^2+y^2+ax+by+7=0$ 이 반지름 1 인 원을 표시한다. 이 원의 중심 a, b 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}\pi$　② $2\sqrt{2}\pi$　③ $3\sqrt{2}\pi$　④ $4\sqrt{2}\pi$　⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-28}{4}$$

$\dfrac{a^2+b^2-28}{4}=1$ 에서

$a^2+b^2=32\cdots$㉠

중심 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2}\right)$ 에서

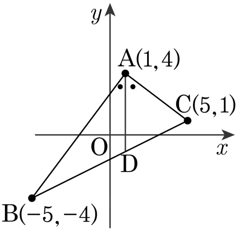
$x=-\dfrac{a}{2}$, $y=-\dfrac{b}{2}$ 이므로

$a=-2x,\ b=-2y$ 를 ㉠에 대입하면

$4x^2+4y^2=32 \quad \therefore\ x^2+y^2=8$

$\therefore\ 2\pi r=4\sqrt{2}\pi$

6. 다음 그림과 같이 세점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



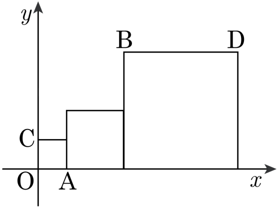
① 1 : 1 ② $\sqrt{2}$: 1 ③ $\sqrt{3}$: 1

④ 2 : 1 ⑤ $\sqrt{5}$: 1

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$
$\overline{AB} = \sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{100} = 10$
$\overline{AC} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$
$\therefore \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

7. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $\mathrm{C}(0, 4)$, 점 $\mathrm{D}(21, 12)$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11　② 13　③ 15

④ 17　⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로

점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로

점 $\mathrm{B}(21-12,\ 12)$

즉, $\mathrm{B}(9,\ 12)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

8. x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$ $+$

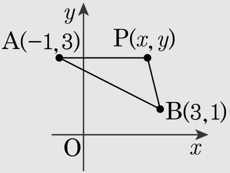
$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$=\overline{AP}+\overline{BP}$를 의미 하므로

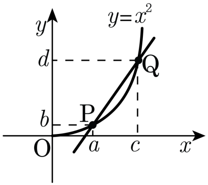
$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$

그러므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

$\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$



9. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{5}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

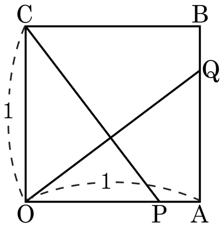
해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(c,d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$

즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ $(\because\ 0 < a < c)$

$$(\overline{\mathrm{PQ}} \text{ 의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a}$$
$$= \frac{(c-a)(c+a)}{c-a}$$
$$= c+a = \sqrt{d}+\sqrt{b} = 2$$

10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 OABC 의 두 변 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 위에 각각 점 P, Q 를 $\overline{OP} = \overline{AQ}$ 가 되도록 잡을때, ($\overline{CP}$ 의 기울기) × ($\overline{OQ}$ 의 기울기)를 구하면?



① $-\frac{1}{2}$　② -1　③ $\frac{1}{2}$

④ 1　⑤ 2

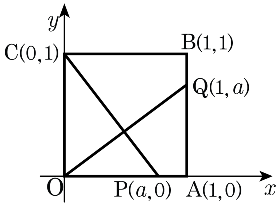
해설

정사각형 OABC 에 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 ($\overline{CP}$ 의 기울기)$= \frac{-1}{a}$,

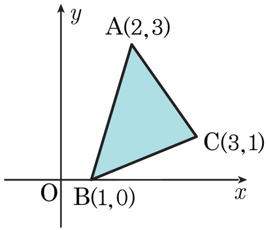
($\overline{OQ}$ 의 기울기)$= \frac{a}{1}$

따라서, 두 직선의 기울기의 곱은

$$\left(\frac{-1}{a}\right) \times \left(\frac{a}{1}\right) = -1$$

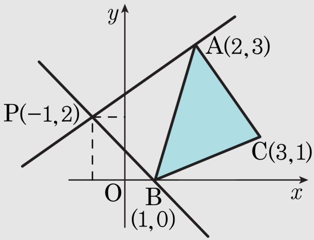


11. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?



① $-1 \le m \le 3$
② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$
③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$
④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$
⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x+1) + y - 2 = 0$ 이므로

점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\dfrac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\dfrac{2-3}{-1-2} = \dfrac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \dfrac{1}{3}$

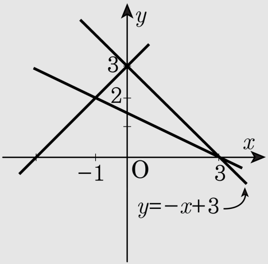
$\therefore\ -\dfrac{1}{3} \le m \le 1$

12. 두 직선 $y=-x+3$, $y=mx+m+2$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는
m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.



$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$

13. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
ㄴ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
ㄷ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는
$(0, 0)$ 과 $(-4, 0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA=30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로
둘레의 길이는 4π 이다

14. 두 원 $(x-a)^2+y^2=4$, $x^2+(y-b)^2=9$가 서로 외접할 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.

② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

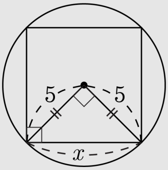
③ 두 종류의 두형이 나타난다.

④ 이 도형의 길이는 10π이다.

⑤ 원점을 지나는 원이다.

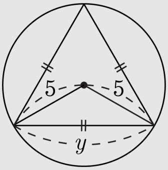
해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.
원 $(x-a)^2+y^2=4$에서 중심은 $(a,\ 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2+(y-b)^2=9$에서 중심은 $(0,\ b)$, 반지름은 3이다.
따라서, $(a,\ 0)$과 $(0,\ b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2+b^2}=5$
$\therefore a^2+b^2=25$
그러므로 구하려는 자취는 $x^2+y^2=25$
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면



$2x^2=10 \therefore\ x=5\sqrt{2}$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 y라 하면



$y=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}\times 2=5\sqrt{3}$

$\therefore\ y=5\sqrt{3}$ 이다.

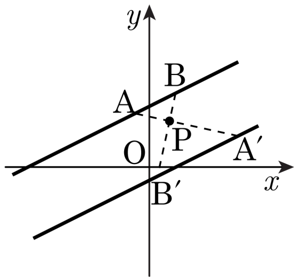
15. 원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원을 O′ 이라고 하자. 두 원 O, O′ 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6,\ 2)$ 를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, ab의 값을 구하면?

① -8　② -12　③ 8　④ 12　⑤ 0

해설

원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
O′ : $(x+1)^2+y^2=1$
두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면
O : $x^2+y^2-2y=0$, O′ : $x^2+y^2+2x=0$
이 때, 직선 AB의 방정식은 $2x+2y=0$,
즉 $y=-x$
따라서 점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(-2,\ -6)$이므로
$a=-2,\ b=-6\quad\therefore ab=12$

16. 좌표평면 위의 정점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A′, B′ 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A′ 의 좌표가 $(3,1)$, 직선 A′B′ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a,b 의 곱 ab 의 값은?



① $-\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

두 점 A′, B′ 은 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로, 직선 A′B′ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다

$\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각) 이므로

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{A'B'}$ 이다.

따라서 직선 A′B′ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또한, 직선 A′B′ 은 A′(3, 1) 을 지나므로

직선 A′B′ 의 방정식은

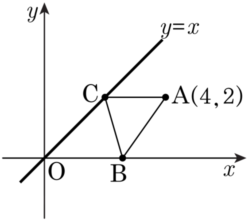
$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore\ ab=-\frac{1}{4}$

17. 다음 그림과 같이 점 A(4, 2) 와 x 축과 직선 $y = x$ 위에 각각 두 점 B, C 가 있다. 이 때, △ABC 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하면?

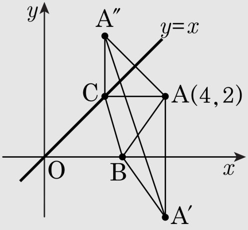


① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{2}$

④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

점 A(4, 2) 를 x 축에 대칭이동한 점 A′(4, −2) 와 $y = x$ 에 대칭이동한 점 A″(2, 4) 를 구하여 연결하면 다음 그림에서

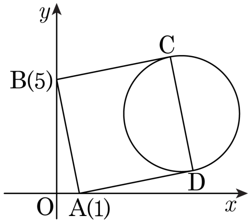


$$(\triangle\text{ABC의 둘레}) = \overline{\text{AB}} + \overline{\text{AC}} + \overline{\text{BC}}$$
$$= \overline{\text{A}'\text{B}} + \overline{\text{A}''\text{C}} + \overline{\text{BC}} \geq \overline{\text{A}'\text{A}''}$$

점 B 와 C 를 직선 A′A″ 이 각각 x 축과 직선 $y = x$ 와 만나는 점으로 잡을 때, △ABC 의 둘레의 길이가 최소이다.

이 때, 최솟값은 $\sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$ 이다.

18. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 제 1 사분면에 정사각형 ABCD 가 있다. $A(1,0), B(0,5)$ 일 때, 변 CD 를 지름으로 하는 원의 방정식은?



① $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$
② $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$
③ $\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$
④ $\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$
⑤ $\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

해설

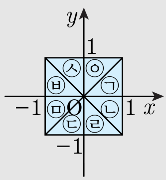
정사각형이므로,
B $\rightarrow$ A : x 축으로 1, y 축으로 -5 이면
A $\rightarrow$ D : x 축으로 5, y 축으로 1 을 이동한다.
$\therefore$ $D(6,1)$
마찬가지로 적용하면, $C=(5,6)$
$\therefore$ 원의 중심 : $\left(\frac{6+5}{2}, \frac{6+1}{2}\right)=\left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$
반지름은 $\frac{\sqrt{1^2+5^2}}{2}$
$\Rightarrow$ $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

19. 양수 a, b 에 대하여 $\max\{|x|, |y|\} \le 1\}$ (단, $\max\{a, b$ 는 a, b 중 작지 않은 수), $|x|+|y| \le 1$, $x^2+y^2 \le 1$ 일 때, A, B, C 중 나타내는 영역의 넓이가 가장 큰 것은?

① A ② B ③ C

④ 모두 같다. ⑤ 구할 수 없다.

해설



$A = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} \le 1\}$ 에서

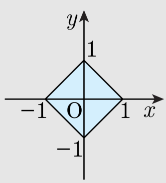
(i) $|x| \ge |y|$ 일 때, $|x| \le 1$, 즉 $|y| \le |x| \le 1$ 에서

$x \ge 0, y \ge 0$ 이면 $y \le x \le 1 \cdots\cdots$ ㉠

$x \ge 0, y < 0$ 이면 $-y \le x \le 1 \cdots\cdots$ ㉡

$x < 0, y \ge 0$ 이면 $y \le -x \le 1 \cdots\cdots$ ㉢

$x < 0, y < 0$ 이면 $-y \le -x \le 1 \cdots\cdots$ ㉣



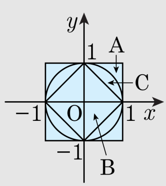
(ii) $|x| < |y|$ 일 때, $|y| \le 1$, 즉 $|x| < |y| \le 1$ 에서

$x \ge 0, y \ge 0$ 이면 $x \le y \le 1 \cdots\cdots$ ㉤

$x \ge 0, y < 0$ 이면 $x < -y \le 1 \cdots\cdots$ ㉥

$x < 0, y \ge 0$ 이면 $-x < y \le 1 \cdots\cdots$ ㉦

$x < 0, y < 0$ 이면 $-x \le -y \le 1 \cdots\cdots$ ㉧



(i), (ii) 에서 A 의 영역은 다음의 그림과 같다.

20. x, y 에 대한 부등식$(x^2+y^2)m+x+y \geq 4m$ 이 m 의 모든 실수값에 대하여 성립할 때, (x, y) 가 그리는 도형의 길이는 ?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 6π

해설

$(x^2+y^2-4)m+x+y \geq 0$ 에서

m 의 모든 실수값에 대하여 항상 성립할 조건은

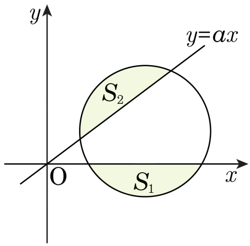
$x^2+y^2-4=0$, $x+y \geq 0$

따라서 $x^2+y^2=4$ 의 둘레 중

$x+y \geq 0$ 의 부분이다.

$\therefore \frac{1}{2} \times 4\pi = 2\pi$

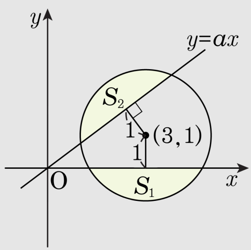
21. 아래 그림에서 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 와 x 축으로둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1=S_2$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설



$S_1=S_2$ 이면, 중심 $(3,1)$ 에서
직선 $y=ax$ 까지 거리는 1 이다.

따라서 $1=\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$ 이고 $a=\dfrac{3}{4}$ 이다.

$\therefore \quad 100a=75$