

1. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7개 ② 8개 ③ 12개 ④ 13개 ⑤ 64개

해설

$$\begin{aligned} & \{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4 \\ &= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4 \\ &= (4a^2-9b^2)^{12} \\ &\therefore (4a^2-9b^2)^{12} \text{의 항의 개수는 13개이다.} \end{aligned}$$

2. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해하였더니, $(x + ay)(x - by + c)$ 가 되었다.
이 때, a, b, c 를 순서대로 쓴 것은?

① $-1, 0, 1$

② $-1, 1, 2$

③ $-2, -1, 1$

④ $-1, -1, -2$

⑤ $-1, 2$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - y^2 + 2y &= (x + y)(x - y) - 2(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = -1, c = -2$$

3. 두 수 $1+2i$, $1-2i$ 를 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 5 = 0$

② $x^2 + 2x + 5 = 0$

③ $x^2 + 5x + 2 = 0$

④ $x^2 - 2x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 5x + 2 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = (1 + 2i) + (1 - 2i) = 2$$

$$\alpha\beta = (1 + 2i)(1 - 2i) = 5$$

$$\therefore x^2 - 2x + 5 = 0$$

4. 다음 중 방정식 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -1

② 1

③ 2

④ $1 + 2i$

⑤ $1 - 2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$$

$$(x + 1)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = 0$$

$$\therefore x = -1, 2, 1 + 2i, 1 - 2i$$

따라서 근이 아닌 것은 1 이다.

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y$$

$$\text{i) } x = y$$

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$\text{ii) } x = 2y$$

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$

6. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?
- ① 6km ② 9km ③ 12km
- ④ 15km ⑤ 18km

해설

그림과 같이 A 마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X 라 하면

A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
 $|x - 0| = 2|x - 9|$
곧, $|x| = 2|x - 9|$
 $\therefore 2(x - 9) = \pm x$
 $\therefore x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$ 이면 $X = B$ 가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12(\text{km})$

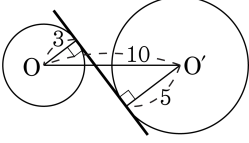
7. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(3, a), C(4, 2)에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{BC} &\text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로} \\ (3-2)^2 + (a-0)^2 &= (4-3)^2 + (2-a)^2 \\ 1 + a^2 &= 1 + 4 - 4a + a^2 \\ 4a &= 4 \quad \therefore a = 1\end{aligned}$$

8. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



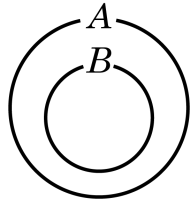
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

9. 두 집합 A, B 의 포함관계가 아래 벤 다이어그램으로 나타내어져 있다.



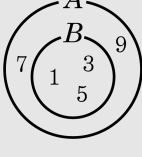
$A = \{1, 3, 5, 7, a\}$, $B = \{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, a\}$, $B = \{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$
그런데 $B \subset A$ 이기 때문에, $9 \in A$ 이어야 하므로 $a = 9$ 이다.



10. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합의 개수가 16 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

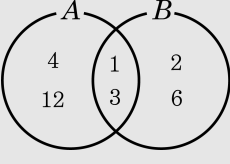
$$2^n = 16 \therefore n = 4$$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{x|x\text{는 }6\text{의 약수}\}$ 이고, $A \cup B = \{x|x\text{는 }12\text{의 약수}\}, A \cap B = \{x|x\text{는 }3\text{이하의 홀수}\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 합은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 13
- ④ 16
- ⑤ 20

해설

$B = \{1, 2, 3, 6\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 $A \cap B = \{1, 3\}$



$A = \{1, 3, 4, 12\}$
따라서 집합 A 의 원소의 합은 20 이다.

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 30, n(A) = 12, n(B) = 15, n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(A^c) - n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$n(A^c) = n(U) - n(A) = 30 - 12 = 18 \text{ 이다.}$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 8 = 7 \text{ 이므로 } n(A^c) - n(B - A) = 18 - 7 = 11 \text{ 이다.}$$

13. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
 $x^3 + ax^2 + bx + 3$
 $= (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$
 $= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = k - 2, b = 3 - 2k, 3 = k + 1$
 $k = 2$ 이므로 $a = 0, b = -1$
 $\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$

14. 두 다항식 $A = x^2 - x - 2$, $B = x^2 - 5x + 6$ 에 대하여 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 두 다항식의 최대공약수는 $x - 1$ 이다.
- ② 두 다항식의 최소공배수는 $x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ 이다.
- ③ 두 다항식의 합은 최대공약수와 같다.
- ④ 두 다항식의 차는 최소공배수와 같다.
- ⑤ 두 다항식의 곱은 최대공약수와 최소공배수의 곱과 같다.

해설

$$A = (x - 2)(x + 1), \quad B = (x - 2)(x - 3)$$

$$\text{최대공약수 : } x - 2$$

$$\text{최소공배수 : } (x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

$$\therefore (\text{두 다항식의 곱}) = (\text{최대공약수}) \times (\text{최소공배수}) = (x - 2)^2(x + 1)(x - 3)$$

15. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4 이다. $A+B=ax^2+bx+c$ 를 만족하는 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$
두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$
 $A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$
 $=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$
 $\therefore a=2, b=3, c=-2$
 $\therefore a+b+c=3$

16. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

17. x 에 대한 다항식 $(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) - 4$ 를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① $x^2 - 2$

② $x^2 + 2$

③ $x^2 - 4x + 2\sqrt{2} - 4$

④ $x^2 + 4x + 2\sqrt{2}$

⑤ $4x - 4$

해설

$x^2 - 2x = t$ 로 치환할 때,

$$t^2 + 3t - 4$$

$$= (t + 4)(t - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

$$(\because x^2 - 2x + 4 \text{의 } \frac{D}{4})$$

인수의 합은

$$(x^2 - 2x + 4) + (x - 1 - \sqrt{2}) + (x - 1 + \sqrt{2}) = x^2 + 2$$

18. 삼차방정식 $x^3 + px + q = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{3}-1$ 일 때, 유리수 p, q 에서 $p+q$ 의 값은 ?

- ① -2 ② -1 ③ 3 ④ 7 ⑤ 9

해설

계수가 모두 유리수이고 $-1 + \sqrt{3}$ 이 한 근이므로, 다른 한 근은 $-1 - \sqrt{3}$ 이다.
또 다른 한근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해
 $(-1 + \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3}) + \alpha = 0, \alpha = 2$
 $(-1 + \sqrt{3})(-1 - \sqrt{3}) + \alpha(-1 + \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3}) = p$
 $(-1 + \sqrt{3})(-1 - \sqrt{3})\alpha = -q$
 $\therefore p = -6, q = 4$
 $\therefore p + q = -2$

해설

$(\sqrt{3}-1)^3 + p(\sqrt{3}-1) + q = 0$
 $-p + q - 10 + (6+p)\sqrt{3} = 0$
 $\therefore -p + q - 10 = 0, 6 + p = 0$
 $\therefore p = -6, q = 4$
 $\therefore p + q = -6 + 4 = -2$

19. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

20. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 4x \geq 0 \end{cases} \quad \text{을 만족하는 정수 } x \text{의 개수를 구하면?}$$

- ① 5개 ② 4개 ③ 3개 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

$$2x^2 - 5x - 3 \leq 0$$

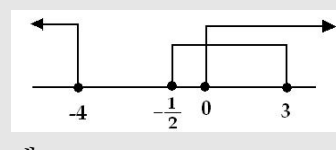
$$(x - 3)(2x + 1) \leq 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

$$x^2 + 4x \geq 0$$

$$x(x + 4) \geq 0$$

$$x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 0$$



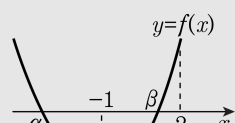
해 : $0 \leq x \leq 3$ $x = 0, 1, 2, 3 \leftarrow$ 정수해

21. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $-2 < a < 0$ ② $-2 < a < 1$ ③ $0 < a < 2$
 ④ $1 < a < 2$ ⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1 - 2a + a^2 - 1 < 0$ 에서 $a^2 - 2a < 0$, $a(a-2) < 0$
 $\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0$, $(a+3)(a+1) > 0$
 $\therefore a < -3$, $a > -1$

(i), (ii)에서 $0 < a < 2$

22. 이차방정식 $x^2 + 4mx - 3m = 0$ 의 한 근은 -1 과 1 사이에 있고, 또 한 근은 -1 보다 작도록 하는 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m > \frac{2}{9}$

② $m > \frac{1}{7}$

③ $m > -\frac{1}{3}$

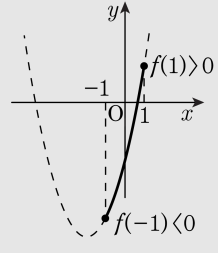
④ $m < -\frac{1}{3}$

⑤ $m < \frac{2}{9}$

해설

$f(x) = x^2 + 4mx - 3m$ 으로 놓을 때,

$f(x) = 0$ 의 근이 한 근은 -1 과 1 사이에 있고, 또 한 근은 -1 보다 작아야 하므로

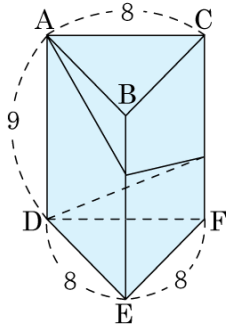


$$f(-1) = 1 - 4m - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{7}$$

$$f(1) = 1 + 4m - 3m > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$\therefore m > \frac{1}{7}$$

23. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

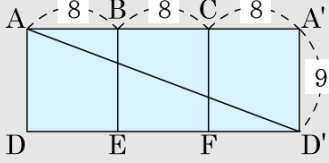


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$$\overline{AD'} = \frac{\sqrt{24^2 + 9^2}}{\sqrt{576 + 81}} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{657}} = 3\sqrt{73}$$



24. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $G(2, -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

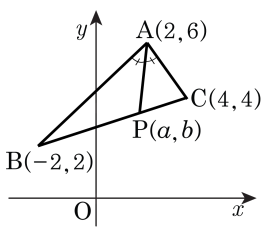
$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$

또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$

$\therefore a + b = -1$

25. 다음 그림과 같이 세 점 A(2, 6), B(-2, 2), C(4, 4) 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 P(a , b) 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



- ① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이
변 BC 와 만나는 점을 P(a , b) 라 하면
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.
이때, $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2}$,
 $\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-6)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
따라서 점 P(a , b) 는 변 BC 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.
 $\therefore a = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2 + 1} = 2$,
 $b = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{10}{3}$
 $\therefore 3ab = 3 \cdot 2 \cdot \frac{10}{3} = 20$

26. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.
또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2}\right)$, 즉 (-2, 6)

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 (-2, 6) 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

27. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

- ① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$
- ② $x^2+(y-5)^2=169$
- ③ $x^2+(y-5)^2=25$
- ④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$
- ⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면
 x 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로
 $(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \dots\dots \textcircled{1}$
 $(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 에서
 $b=a+5 \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $a^2-8a=a(a-8)=0 \therefore a=0$ 또는 $a=8$
 $\textcircled{3}$ 에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는
 $(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

28. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

29. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, \quad x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + a = 0$

- ① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x - 1)^2(x + 3) = 0$ ∴ $x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉠}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉡}}$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4}, b = \frac{9}{4}, ab = -\frac{81}{16}$

30. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$ 라 하자. 이 때, a 가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = a$ 로 치환하면

$$x^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0$$

$\therefore a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A 의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

31. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
 $\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
 $\therefore a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서
 $a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
 $\therefore a = 2$

따라서 모든 a의 값의 합은
 $3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} + 3 + (-3) + 2 = 8$

32. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA의 중점의 좌표가 각각 $(-2, 7)$, $(-6, 4)$, $(5, -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$ $C(a_3, b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{b_3 + b_1}{2}\right) \text{ 이고}$$

이들의 합을 3으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right) \text{ 로}$$

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G = \left(\frac{-2 - 6 + 5}{3}, \frac{7 + 4 - 2}{3}\right) = (-1, 3)$$

$\therefore 2$

33. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

- ㉠ $c = b$ 이면 두 점에서 만난다.
- ㉡ $c = 2b$ 이면 만나지 않는다.
- ㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이면 한 점에서 만난다.

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0, 0)$ 이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

㉠ $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because b \geq a$)

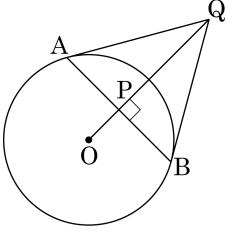
그러므로 교점은 없다.

㉢ $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

34. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고
 $\angle OPA = 90^\circ$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

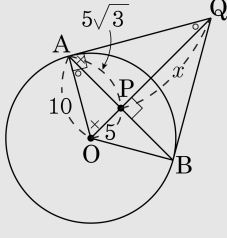
$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

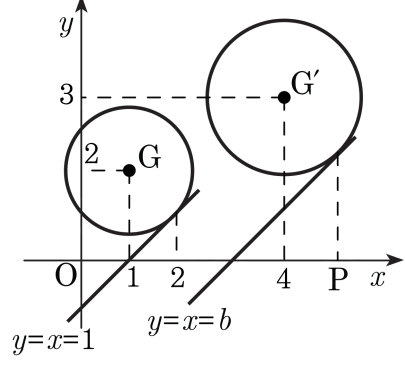
$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$$\therefore \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \frac{75}{5} = 15$$



35. 다음 그림과 같이 같은 크기의 두 원 $G : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, $G' : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ 가 있다. 또, 원 G 는 $x=2$ 에서 직선 $y=x-1$ 에 접하고, G' 은 $x=p$ 에서 직선 $y=x-b$ 에 접하고 있다. 이 때, $p+b$ 의 값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

원 G' 은 원 G 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 원 G 의 접점의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 원 G' 의 접점의 좌표는 $(5, 2)$ 이다.
따라서, $p=5$ 이고, 점 $(5, 2)$ 는 직선 $y=x-b$ 위의 점이므로 $2=5-b$ 에서 $b=3$
 $\therefore p+b=5+3=8$

36. 두 집합 $A = \{x|1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 를 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 라 할 때, q 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

- ① 1, 3 ② 1, 5 ③ 1, 7 ④ 3, 5 ⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \leq x \leq 3\} \subset X \subset \{x|1 \leq x \leq 5\}$
 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \leq q \leq 5$

37. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 α 의 켤레복소수, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

- $\textcircled{\tiny \neg}$

$\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
- $\textcircled{\tiny \sqcup}$

$\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $a = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
- $\textcircled{\tiny \sqsubset}$

$\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
- $\textcircled{\tiny \sqsupset}$

$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.
- $\textcircled{\tiny \boxplus}$

$\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

- $\textcircled{\tiny 1}$

$\textcircled{\tiny \neg}$

$\textcircled{\tiny 2}$

$\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

$\textcircled{\tiny 3}$

$\textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqsupset}$

$\textcircled{\tiny 4}$

$\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqsupset}$

$\textcircled{\tiny 5}$

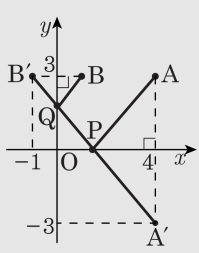
$\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqsupset}, \textcircled{\tiny \boxplus}$
- 해설
- $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)
 $\textcircled{\tiny \neg} \alpha = \bar{\beta} \Rightarrow \beta = \bar{\alpha}$
 $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} = 0$
 $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ (참)
 $\textcircled{\tiny \sqcup}$ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$ (거짓)
 $\textcircled{\tiny \sqsupset} \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)
 $\textcircled{\tiny \boxplus} \alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0, b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

38. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 3), B(1, 3)이 있다. 점 A에서 x 축 위의 점과 y 축 위의 점을 각각 지나 점 B에 이르는 최단 거리는?

- ① 5 ② 7 ③ $\sqrt{53}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{75}$

해설

점 A의 x 축에 대한 대칭점을 A', 점 B의 y 축에 대한 대칭점을 B'
두 점 A', B'을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라고 하면
 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$
주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 A'(4, -3), B'(-1, 3) 사이의 거리이다.
 $\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$



39. 세 점 A(2, 3), B(3, 0), C(4, 1) 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle C$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 D(a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 15

해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해
 $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \sqrt{2}$ 에서
 $\overline{AD} : BD = \overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 이다.
따라서 점 D는 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이므로
 $D(a, b) = \left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2 + 1} \right) = \left(\frac{8}{3}, 1 \right)$
 $\therefore 3ab = 8$

40. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B^c) = 0$ 이고, $A \cap B = \{3\}$, $(A \cup B^c) - (A^c \cup B) = \{1, 4, 5, 6\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}(A \cup B^c) - (A^c \cup B) &= (A \cup B^c) \cap (A \cap B^c) \\ &= (A \cap B^c) \\ &= \{1, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

따라서, $A \cap B = \{3\}$ 이므로

$A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ 이고, $n(A^c \cap B^c) = 0$ 이므로 $B = \{2, 3, 7\}$

$$n(A) + n(B) = 5 + 3 = 8$$