1. $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 10항은?

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{11}$ ③ $\dfrac{1}{110}$ ④ $\dfrac{1}{111}$ ⑤ $\dfrac{1}{1010}$

해설

$\dfrac{1}{10\cdot 11}=\dfrac{1}{110}$

2. 등차수열 a_n의 일반항이 $a_n = -6n + 7$일 때, 첫째 항 a와 공차 d는?

① $a = -1,\ d = 5$ ② $a = -1,\ d = 6$ ③ $a = 1,\ d = -5$
④ $a = 1,\ d = -6$ ⑤ $a = 2,\ d = 7$

해설

$a_n = -6n + 7$이므로
$a_1 = -6 \cdot 1 + 7 = 1$,
$a_2 = -6 \cdot 2 + 7 = -5$이므로
$d = a_2 - a_1 = -6$

3. 등차수열 $10,\ 6,\ 2,\ -2,\ -6, \cdots$ 에서 공차를 d, 제 10항을 b라 할 때, $b+d$의 값은?

① -10 ② -20 ③ -30 ④ -40 ⑤ -50

해설

공차는 -4이므로 $d=-4$

$a_n = 10 + (n-1)(-4) = -4n + 14$

$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26$에서 $b = -26$

$\therefore\ b + d = -26 + (-4) = -30$

4. 두 수 3, 7의 조화중항을 x, 두 수 4, 6의 조화중항을 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3+7} = \frac{42}{10}$, $y = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4+6} = \frac{48}{10}$

$x + y = \frac{42}{10} + \frac{48}{10} = \frac{90}{10} = 9$

5. 다음 (　　) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i,(\quad),\cdots$

① $5-18i$　② $5-20i$　③ $5-24i$
④ $5-32i$　⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을
$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i,\cdots$ 와 같이 생각한다면
(단, $a_k,\ b_k$는 실수)
수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고
수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.
따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$ 이다.

6. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$

① $(-1)^{n+1}\times n$ ② $n-(-1)^n$ ③ $(-1)^n+n$
④ $(-1)^n\times n$ ⑤ $\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$

해설

$a_1=-1\cdot 1$
$a_2=(-1)^2\cdot 2$
$a_3=(-1)^3\cdot 3$
$a_4=(-1)^4\cdot 4$이므로
$a_n=(-1)^n\cdot n$

7. 등차수열 10, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{99}, -390 에서 공차는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$b_1 = 10$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_2$, $\cdots$,

$b_{100} = a_{99}$, $b_{101} = -390$

$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1)\cdot d = -390$

$100d = -400$

$\therefore\ d = -4$

8. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α, β의 등차중항은

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

9. 첫째항이 -43, 공차가 7 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8 항 ② 제 9 항 ③ 제 10 항
④ 제 11 항 ⑤ 제 12 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$
이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은
$7n - 50 > 0,\ 7n > 50$
$\therefore\ n > \frac{50}{7} = 7.14\cdots$
따라서 자연수 n의 최솟값은 8 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

10. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$S_n = 94$에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47$ $\quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4$ $\quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2$ $\quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1$ $\quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

11. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} = 25 \times 8 = 200$$

12. 직각삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 4, a, b 이고 이 순서로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 직각삼각형의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{40}{3}$ ⑤ $\frac{64}{3}$

해설

$4 < a < b$ 이고, 4, a, b 가 직각삼각형의 세 변의 길이이므로

$4^2 + a^2 = b^2 \cdots$ ㉠

또, 4, a, b 가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2a = 4 + b,\ b = 2a - 4 \cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면

$4^2 + a^2 = (2a-4)^2,\ 16 + a^2 = 4a^2 - 16a + 16$

$3a^2 - 16a = 0,\ a(3a-16) = 0$

$\therefore\ a = \frac{16}{3}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

13. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9 인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3 인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9 인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

㉢ $$\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b) = 6n + 3 + b$$
이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

14. 공차가 $d_1(d_1 \neq 0)$ 인 등차수열
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \cdots$ 에 대하여 두 수열
$a_1 + a_2,\ a_3 + a_4,\ a_5 + a_6,\ a_7 + a_8, \cdots$
$a_1 + a_2 + a_3,\ a_4 + a_5 + a_6,\ a_7 + a_8 + a_9, \cdots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $2d_2 = 3d_3$ ② $3d_2 = 2d_3$ ③ $5d_2 = 2d_3$
④ $7d_2 = 3d_3$ ⑤ $9d_2 = 4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1 + d_1,\ 2a_1 + 5d_1,\ 2a_1 + 9d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_2 = 4d_1$ 이고
둘째 수열은 $3a_1 + 3d_1,\ 3a_1 + 12d_1,\ 3a_1 + 21d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_3 = 9d_1$ 이다.
$\therefore\ 9d_2 = 4d_3$

15. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)

$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$

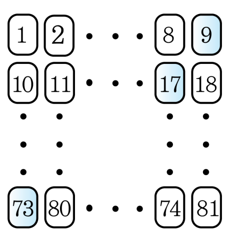
$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2}$

$- \frac{7(105 + 195)}{2}$

$= 47 \cdot 150$

$\therefore \frac{1}{150}S = 47$

16. 1부터 81까지 쓰여진 카드를 오른쪽 그림과 같이 배열하였다. 이때 오른쪽 대각선 방향(/)으로 배열된 카드에 쓰여진 수들의 합은?



① 367　② 369　③ 371
④ 373　⑤ 375

해설

구하는 수열은 9, 17, 25, $\cdots$, 73으로 공차가 8인 등차수열이다.

따라서, 구하는 합은 $\frac{9(9+73)}{2} = 369$이다.

17. 등차수열을 이루는 세 수가 있다. 이 세 수의 합은 6이고, 세 수의 각각의 제곱의 합은 14이다. 이 세 수로 알맞은 것은?

① $-4,\ 3,\ 10$　② $-2,\ 1,\ 3$　③ $-1,\ 3,\ 7$

④ $0,\ 2,\ 4$　⑤ $1,\ 2,\ 3$

해설

구하는 세 수를 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓으면 이 세 수의 합이 6이므로

$(a-d)+a+(a+d)=6 \cdots$ ㉠

세 수의 각각의 제곱의 합이 14이므로

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=14 \cdots$ ㉡

㉠에서 $3a=6 \quad \therefore\ a=2$

㉡에서 $3a^2+2d^2=14$

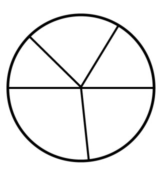
$a=2$이므로 $d^2=1$

$d=1$일 때, $a-d=1,\ a=2,\ a+d=3$

$d=-1$일 때, $a-d=3,\ a=2,\ a+d=1$

따라서 세 수는 $1,\ 2,\ 3$이다.

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때, k의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d(d>0)$라 하면

5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로

$5a=15^2\pi \quad \therefore\ a=45\pi$

또, 주어진 조건부으로부터

$a+2d=2(a-2d)$에서 $d=\frac{a}{6}=\frac{15\pi}{2}$

따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는

$a+2d=45\pi+2\cdot\frac{15}{2}\pi=60\pi \quad \therefore\ k=60$

19. 첫째항이 2009 이고 공차 d가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{402} \times S_{403} < 0$일 때, $a_n \times a_{n+1} < 0$을 만족하는 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$S_{402} \times S_{403} < 0$에서 $S_{402} > 0,\ S_{403} < 0$

$S_{402} = \frac{402}{2}(2 \times 2009 + 401d) > 0$

$\therefore\ d > -10.\cdots$

$S_{403} = \frac{403}{2}(2 \times 2009 + 402d) < 0$

$\therefore\ d < -9.\cdots$

d는 정수이므로 $d = -10$이다.

따라서 $a_n = 2009 + (n-1) \times (-10)$

$a_n < 0$인 최초의 n을 구하면

$a_n = 2009 + (n-1) \times (-10) < 0$

$\therefore\ n > 201.9$

따라서 $n \leq 201$이면 $a_n > 0,\ n \geq 202$이면 $a_n < 0$이므로

$a_n \times a_{n+1} < 0$을 만족하는 n의 값은 201 이다.

20. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ 이다.)

$a_1 = 1,\ a_2 = 3$

$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4(n = 2, 3, 4, \cdots)$ 일 때, a_{20}의 값은?

① 39　② 43　③ 47　④ 51　⑤ 55

해설

$S_{n+1} - S_{n-1} = a_{n+1} + a_n$ 이므로 주어진 식은

$(a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

$(a_{n+1} - a_n)^2 = 4$

$\therefore\ a_{n+1} - a_n = 2(\because\ a_{n+1} > a_n)$

$\therefore\ a_{20} = 1 + 2(20 - 1) = 39$