1. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $f(1) = f(3) = 8$이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로
이차함수는 $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.
$f(3) = 8$이므로 $x = 3,\ y = 8$을 대입하면
$a + 5 = 8 \quad \therefore\ a = 3$ 이므로
$f(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$
$\therefore\ a + b + c = 8$

2. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

3. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 10 개 ④ 13 개 ⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면
$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.
$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$
$\Rightarrow k < 16$
$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

4. 이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$　　② $m < -1$ 또는 $m > \frac{1}{3}$

③ $m < \frac{1}{3}$ 또는 $m > 2$　　④ $m < \frac{2}{3}$ 또는 $m > 2$

⑤ $m < -2$ 또는 $m > 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 x에 대하여

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 이 항상 성립하여야 한다.

따라서, 이차방정식 $x^2 + (m-2)x + m^2$ 의 판별식 $\mathrm{D} < 0$ 이어야 한다.

$\mathrm{D} = (\mathrm{m}-2)^2 - 4\mathrm{m}^2 < 0$

$(m+2)(3m-2) > 0$

$\therefore m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$

5. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$의 그래프와 직선 $y = 5x + b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 $(3,\ 17)$일 때, $a + b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$의 두 실근이다.
$2x^2 + (a - 5)x + 12 - b = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -\dfrac{a-5}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로
$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 3$에서 $\alpha + \beta = 6$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-\dfrac{a-5}{2} = 6$
$\therefore a = -7$
또, 점 $(3,\ 17)$은 직선 $y = 5x+b$ 위의 점이므로 $17 = 5\cdot 3 + b$ $\therefore$ $b = 2$
$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

6. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 -3
② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1
④ 최댓값 -1, 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x에 관해 내림차순으로 정리하면
$4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$
실수의 해를 가지므로
$\frac{D}{4} = (-8)^2 - 4(y^2 + 2y + 13) \geq 0$
$\therefore\ y^2 + 2y - 3 \leq 0$
$\therefore\ (y + 3)(y - 1) \leq 0$
$\therefore\ -3 \leq y \leq 1$
따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

7. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

8. $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3y+5z=21 \\ 5z+2x=17 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ 일 때, 곱 $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\begin{cases} 2x+3y=8 & \cdots ㉠ \\ 3y+5z=21 & \cdots ㉡ \\ 5z+2x=17 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(2x+3y+5z)=46$

$2x+3y+5z=23$

㉠ 식에서 $5z=15, z=3$, $y=2$, $x=1$

$\alpha\beta\gamma=1\cdot2\cdot3=6$

9. 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a + 2 \\ 4x - ay = 3a + 6 \end{cases}$ 은 $a = k$ 일 때 불능(해가 없다) 이고, $a = l$ 일 때 부정(해가 무수히 많다.) 이라고 한다.
이 때, $(k,\ l)$ 을 구하면?

① $(2, 3)$ ② $(2, -2)$ ③ $(-2, 2)$
④ $(-2, 3)$ ⑤ $(4, -4)$

해설

$\begin{cases} ax - y = a + 2 & \cdots ㉠ \\ 4x - ay = 3a + 6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

주어진 연립방정식에서 y를 소거하면
㉠ $\times a -$ ㉡
$(a^2 - 4)x = a^2 - a - 6$
$(a + 2)(a - 2)x = (a + 2)(a - 3)$
$a = 2$ 일 때, $0 \cdot x = -4$ 이므로 불능이다.
$a = -2$ 일 때, $0 \cdot x = 0$ 이므로 부정이다.
$\therefore\ k = 2,\ l = -2$

10. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 40 개

해설
작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

i) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ii) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

i), ii) 에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

12. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

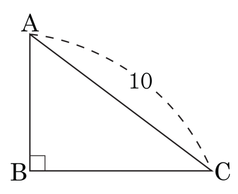
㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\ \therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

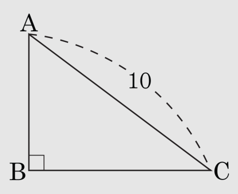
$\therefore\ m+\alpha=2$

13. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48　② 40　③ 32　④ 18　⑤ 12

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = a, \overline{\mathrm{BC}} = b$

둘레의 길이가 24 이므로

$24 = a + b + 10$

$a + b = 14$

직각삼각형이므로,

$a^2 + b^2 = 10^2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\}$

$= \frac{1}{2}\left\{14^2 - 10^2\right\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$

14. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면
$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로
$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$
$(2-k)\alpha+(k-2)=0$
따라서 $\alpha=1$ 이고
$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

15. 0이 아닌 실수 $x,\ y$가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서
$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$
$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$
$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$
$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로
$xy-2a=0,\ y-2ax=0$
$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$
$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm 1$

16. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.
1kg에 p원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

① 2600원 ② 2670원 ③ 2700원
④ 2750원 ⑤ 2800원

해설

3000원에서 $10x$원 가격을 내렸을 때
1kg의 판매가격은 $3000-10x$
1일 판매량은 $100+3x$
따라서 하루의 이익 P는

$$\begin{aligned} P &= (3000-10x)(100+3x)-2000(100+3x) \\ &= (1000-10x)(100+3x) \\ &= -30x^2+2000x+100000 \\ &= -30\left(x^2-\frac{200}{3}x\right)+100000 \\ &= -30\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{400000}{3} \end{aligned}$$

x가 문제에서 정수이므로 $x=33$일 때 최대이다.
따라서 $3000-330=2670$(원)

17. 오차방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$에서
$(x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$
$\therefore\ x+1=0$ 또는
$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$
(i) $x+1=0$에서 $x=-1$
(ii) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을
x^2 으로 나누면
$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(s^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$
$=0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$
이 때, $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면
$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$
①$x+\frac{1}{x}=1$일 때, $x^2-x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
②$x+\frac{1}{x}=3$일 때, $x^2-3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
따라서, 주어진 방정식의
두 허근이 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로
두 허근 α, β의 합은
$\alpha+\beta=1$이다.

18. 서로 다른 세 정수 a, b, c에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c)=2$가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\dfrac{a+b+c}{3}$　② $\dfrac{a+b+c-1}{3}$　③ $\dfrac{a+b+c-2}{3}$
④ $\dfrac{a+b+c-3}{3}$　⑤ $\dfrac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a<b<c$ 라 가정했을때, 정수근을 α라고 하면, $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)=2$를 만족하는 순서쌍은 $(1,-1,-2)$ 밖에 없다.

$\Rightarrow \alpha-a=1$

$\alpha-b=-1$

$\alpha-c=-2$

세 식을 다 더하면,

$3\alpha=a+b+c-2$, $\alpha=\dfrac{a+b+c-2}{3}$

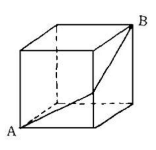
19. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$에 대하여 α는 $f(x)+1=0$의 한 정수근이고 β는 $f(x)-1=0$의 한 정수근일 때, $\beta-\alpha$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)-1=0$이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=2$
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d$는 정수)로 놓으면
$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^3-\alpha^3)+b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)=2$
$(\beta-\alpha)\left\{a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c\right\}=2$
따라서 $\beta-\alpha$는 2의 약수이어야 한다.
$\therefore\ \beta-\alpha=\pm1$ 또는 ± 2

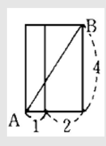
20. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 합이 28 cm, 겉넓이가 28cm^2, 부피가 8cm^3 인 직육면체가 있다. 이 직육면체에서 면을 따라 꼭지점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리는?

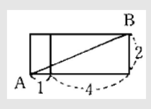


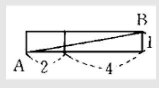
① 5cm　② 6cm　③ $2\sqrt{5}$cm
④ $\sqrt{29}$cm　⑤ $\sqrt{37}$cm

해설

각 모서리의 길이를 $a,\ b,\ c$ 라 하면
$4(a+b+c)=28$
$2(ab+bc+ca)=28$
$abc=8$
$\therefore\ a+b+c=7$
$ab+bc+ca=14$
$abc=8$
이 때, $a,\ b,\ c$ 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은 $x^3-7x^2+14x-8=0$ $(x-1)(x-2)(x-4)=0$ 그러므로 모서리의 길이는 각각 1cm , 2cm , 4cm 이다. 이제 꼭짓점 A 에서 꼭지점 B에 이르는 거리를전개도를 이용하여 구해 보자.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(i) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm})$
(ii) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}(\text{cm})$
(iii) 에서 $\overline{AB}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}(\text{cm})$
따라서 A 에서 B 에 이르는 가장 짧은 거리는 5cm