1. 명제 $p \rightarrow \ \sim q$ 의 대우는?

① $p \rightarrow q$ ② $\sim q \rightarrow p$ ③ $\sim q \rightarrow \ \sim p$
④ $\sim p \rightarrow q$ ⑤ $q \rightarrow \ \sim p$

해설
$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$, $p \rightarrow \ \sim q$ 의 대우는 $\sim(\sim q) \rightarrow \sim p$
$\therefore q \rightarrow \ \sim p$

2. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.

② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.

③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.

④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.

⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 '$p \rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \rightarrow \sim p$' 이다.
p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

3. 실수 x, y가 $x^2 + y^2 = 1$을 만족할 때, 곱 xy의 최댓값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2}$ 이고

$\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |xy|$ 이므로 $|xy| \leq \frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$

그러므로 xy의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

4. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

5. $x \ge 0,\ y \ge 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

① 2　② 3　③ $\sqrt{10}$　④ $\sqrt{15}$　⑤ 4

해설

$x,\ y$ 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \le (1^2 + 1^2)\left\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2\right\}$
$= 2(x + 3y)$
$= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \ge 0$ 이므로
$0 \le \sqrt{x} + \sqrt{3y} \le 4$
따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4 이다.

6. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2$ 또는 $x = 4$
, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

7. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

8. 명제 '$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P$ ③ $P \subset Q^c$
④ $P \cup Q = P$ ⑤ $P \subset Q$

해설

'$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.' 가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

9. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

10. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b$,　$q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5$,　$q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3$,　$q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0$,　$q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz$,　$q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 필요조건이다.

11. 명제 '모든 학생들은 수학을 좋아한다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 모든 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
② 모든 학생들은 영어를 좋아한다.
③ 어떤 학생들은 수학을 좋아한다.
④ 어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
⑤ 어떤 학생들은 영어를 좋아한다.

해설

'모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 주어진 명제의 부정은 '어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.' 이다.

12. 집합 $A = \{x \mid -1 \le x \le 1,\ x\text{는 정수}\}$ 에 대하여 $a \in A,\ b \in A$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① 임의의 a 에 대하여 $a^2 > 0$ 이다.

② $a^2 - 1 = 0$ 을 만족하지 않는 a 가 있다.

③ 모든 $a,\ b$ 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족한다.

④ 모든 $a,\ b$ 에 대하여 $a + b > 2$ 이다.

⑤ $|a| = |b|$ 이면 $ab = 1$ 이다.

해설

① $a = 0$ 이면 $a^2 = 0$ 이므로 거짓이다.
② $a = 0$ 이면 $a^2 = 0$ 이므로 참이다.
③ $a = 1,\ b = 1$ 이면 $a^2 + b^2 = 2$ 이므로 거짓이다.
④ $a = 0,\ b = 0$ 이면 $a + b = 0$ 이므로 거짓이다.
⑤ $a = 1,\ b = -1$ 이면 $|a| = |b| = 1$ 이지만 $ab = -1$ 이므로 거짓이다.

13. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음 명제 중 거짓인 것은?

① 어떤 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 5$ 이다.

② 어떤 x, y 에 대하여 $x + y \leq 5$ 이다.

③ 모든 x 에 대하여 $x - 1 < 5$ 이다.

④ 어떤 x 에 대하여 $x^2 - 1 \leq 0$ 이다.

⑤ 모든 x 에 대하여 $|x - x^2| \geq 5$ 이다.

해설

⑤ (반례) $x = 1$ 인 경우 $|1 - 1| = 0$ 이므로 거짓이다.

14. 다음 중 참인 명제는?

① 2 는 홀수이다.

② $\sqrt{2}$ 는 유리수이다.

③ 99 는 100 보다 작다.

④ $\varnothing$ 은 무한집합이다.

⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

해설

③ 99는 100보다 작은 것이 사실이므로 참이다.

15. 명제 '모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.'를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.

② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여$xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$이고 $yz \neq zx$ 이다.

④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$이고 $zx \neq xy$ 이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

'$xy = yz = zx$' 는 '$xy = yz$ 이고 $yz = zx$이고 $zx = xy$' 이므로 '$xy = yz = zx$'의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 $x,\ y,\ z$ 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

16. 다음 중 명제 'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0,\ y = 2$ ② $x = 1,\ y = 2$
③ $x = 0,\ y = \sqrt{2}$ ④ $x = 1,\ y = \sqrt{2}$
⑤ $x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{3}$

해설

'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이는 'x또는y 가 유리수가 아니면 xy 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.
즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

17. 두 조건 $p : |x-k| \leq 1$, $q : -7 \leq x \leq 3$에서 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12 ② -4 ③ 8 ④ 4 ⑤ 12

해설

$P \subset Q$

$p : |x-k| \leq 1 \rightarrow k-1 \leq x \leq k+1$

$-7 \leq k-1 \rightarrow -6 \leq k$

$k+1 \leq 3 \rightarrow k \leq 2$

$\therefore\ -6 \leq k \leq 2$

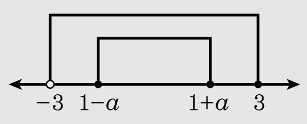
$(-6)+2=-4$

18. 명제 '$|x-1| \le a$이면 $|x| < 3$ 이다.'가 참이 되기 위한 a의 값의 범위는? (단, x, y는 실수이고, $a > 0$)

① $0 < a \le 2$　② $0 < a < 2$　③ $0 < a \le 4$
④ $0 < a < 4$　⑤ $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \le a$에서 $-a \le x-1 \le a$ $\therefore$ $1-a \le x \le 1+a$ $|x| < 3$에서 $-3 < x < 3$ 따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서 $1-a > -3$ 그리고 $1+a < 3$ $\therefore$ $a < 4$ 그리고 $a < 2$
$\therefore$ $a < 2$ 그런데 $0 < a$ 이므로, $0 < a < 2$

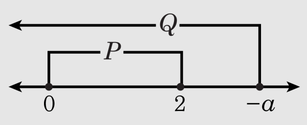
19. 실수 x에 대한 두 조건 $p\ :\ 0 \le x \le 2$, $q\ :\ x+a \le 0$이 있다. 명제 $p\ \rightarrow\ q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$p,\ q$를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $p\ \rightarrow\ q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P=\{x|0 \le x \le 2\},\ Q=\{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a,\ a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

20. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로
$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$
$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$
$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

21. 세 조건 p, q, r에 대한 다음 추론 중 옳지 않은 것은?

① $p \to \sim q$ 이고 $r \to q$ 이면 $p \to \sim r$ 이다.

② $p \to \sim q$ 이고 $\sim r \to q$ 이면 $p \to r$ 이다.

③ $q \to \sim p$ 이고 $\sim q \to r$ 이면 $p \to r$ 이다.

④ $p \to q$ 이고 $\sim r \to \sim q$ 이면 $p \to r$ 이다.

⑤ $p \to q$ 이고 $q \to p$ 이면 $p \leftrightarrow \sim q$ 이다.

해설

⑤ $p \to q$, $q \to p$ 이면 $p \leftrightarrow q$ 이다.

22. 명제 $p \to \sim q, \sim q \to r, \sim p \to \sim r$ 가 모두 참일 때, 다음 명제 중 항상 참이 <u>아닌</u> 것은?

① $p \to r$　　② $q \to \sim r$　　③ $\sim p \to q$

④ $\sim q \to p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

명제 $p \to \sim q, \sim q \to r, \sim p \to \sim r$ 가 참이므로 각각의 대우인 $q \to \sim p, \sim r \to q, r \to p$ 도 모두 참이다.

① $p \to \sim q \to r$, 즉 $p \to r$ 도 참이다.

② $q \to \sim p \to \sim r$, 즉 $q \to \sim r$ 도 참이다.

③ $\sim p \to \sim r \to q$, 즉 $\sim p \to q$ 도 참이다.

④ $\sim q \to r \to p$, 즉 $\sim q \to p$ 도 참이다.

23. 다음 두 조건으로 알 수 있는 것은?

㉠ 어떤 사람은 안경을 끼지 않았다.
㉡ 여자는 모두 안경을 꼈다.

① 남자는 모두 안경을 꼈다.

② 안경을 끼지 않은 여자도 있다.

③ 여자는 모두 안경을 끼지 않았다.

④ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

⑤ 남자는 모두 안경을 끼지 않는다.

해설

안경을 낀 사람의 집합을 A, 여자의 집합을 B 라고 하면

㉠ $A^c \neq \phi$

㉡ $B \subset A \;\Rightarrow\; A^c \subset B^c$

안경을 쓰지 않는 사람은 여자가 아니다.

$\therefore$ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

24. 다음은 명제 「a, b, c가 양의 정수일 때, $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c중 적어도 하나는 짝수이다.」의 증명이다.

증명

> 주어진 명제의 대우는 「a, b, c가 양의 정수일 때, a, b, c가 (가)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」a, b, c 가 (가)이면, a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수이므로 a^2+b^2 은 (나), c^2 은 (다)가 되어 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.
> 따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 적어도 하나는 홀수, 홀수, 짝수

② 적어도 하나는 홀수, 짝수, 홀수

③ 모두 홀수, 홀수, 짝수

④ 모두 홀수, 짝수, 홀수

⑤ 모두 짝수, 홀수, 짝수

해설

'a, b, c중 적어도 하나는 짝수이다.'의 부정은 'a, b, c 모두 홀수이다.' 따라서 주어진 명제의 대우는 「a, b, c 가 양의 정수일 때, a, b, c 가 (모두 홀수)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」a, b, c 가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수 a^2+b^2 은 (홀수)+(홀수)로 (짝수), c^2 은 (홀수)이므로 $a^2+b^2 \neq c^2$

25. 다음은 명제「x, y가 정수일 때 xy가 짝수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.」를 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 결론을 부정하여 (가) 이면 $x = 2m+1, y =$ (나)(m, n 은 정수) 이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(mn+m+n)+1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① x 또는 y 가 짝수, $2n$

② x , y 중 하나만 짝수, $2n$

③ x , y 중 하나만 홀수, $2n+1$

④ x , y 모두 홀수, $2n+1$

⑤ x , y 모두 짝수, $2n+1$

해설

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y가 모두 (가): 홀수이면 $x = 2m+1$, (나) : $y = 2n+1$ (m, n은 정수) 이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(2mn+m+n)+1$ 이므로 xy는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

26. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은? (단, a, x, y는 실수)

① $p : a < 0,\ q : \sqrt{a^2} = -a$

② $p : xy < 0,\ q : x < 0$ 이고 $y > 0$

③ $p : xy = 0,\ q : x = 0$ 또는 $y = 0$

④ $p : A \cup (B - A) = B,\ q : A \subset B$

⑤ $p : x,\ y$ 가 유리수, $q : x + y,\ xy$ 가 유리수

해설

② 충분조건일 때 의 반례는 $x > 0$ 이고, $y < 0$ 인 경우이다.

27. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P - Q = \varnothing$ ② $P \cap Q = Q$ ③ $P \cap Q = P$
④ $P^c = Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \to \sim q$이고, 대우 $q \to p$는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

28. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \cup (Q - P) = P$ 인 관계가 성립한다면 q 는 p 이기 위한 무슨 조건인가?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

해설

$$\begin{aligned} P \cup (Q - P) &= P \cup (Q \cap P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap U \\ &= P \cup Q \end{aligned}$$

에서 $P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$

따라서, q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

29. 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에서 $p,\ q$ 는 어느 것이나 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이라 한다. 이 때, r 은 s 이기 위한 무슨 조건인가 ?

① 필요조건 ② 충분조건

③ 필요충분조건 ④ 아무 조건도 아니다.

⑤ 위 사실로는 알 수 없다.

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로
$p \Rightarrow r$ 같은 방법으로 하면
주어진 조건으로부터 $q \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ s \Rightarrow q$
$\therefore r \Rightarrow s$ 이고 $s \Rightarrow r$ 이므로 $r \leftrightarrow s$
따라서, r 은 s 이기 위한 필요충분조건이다.

$$\begin{tikzcd} & & q \arrow[dl, Rightarrow] & \\ p \arrow[r, Rightarrow] & r \arrow[rr, Rightarrow] & & s \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

30. $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$

② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$

⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

해설

$(a+b)(x+y) - 2(ax+by)$
$= ay + bx - ax - by$
$= a(y-x) - b(y-x)$
$= (a-b)(y-x)$

그런데 $a-b>0,\ y-x<0$

$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

31. 다음은 $|a| < 1,\ |b| < 1,\ |c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$abc + 2 > a + b + c$ $= abc + 1 + 1 - a - b - c$ $= (1 - ab)(1 - c) + ($㉠$)$

$|a| < 1$ 이므로 (㉡) $< 1 - a <$ (㉢)
같은 방법으로 (㉡) $< 1 - b <$ (㉢),
(㉡) $< 1 - c <$ (㉢)
또한 $|ab| < 1$ 이므로 (㉡) $< 1 - ab <$ (㉢)
따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) +$ (㉠) $>$ (㉡)
이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$
② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$
③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$
④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$
⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$abc + 2 > a + b + c = abc + 1 + 1 - a - b - c$$
$$= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b$$
$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b)$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$
$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$
$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$
또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$
따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$
$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$
이므로 $abc + 2 > a + b + c$

32. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \le |a|+|b|$ 이성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \ge 0, |a|+|b| \ge 0$ 이므로
$|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab)$
그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \ge 0$
$\therefore\ |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$
따라서 $|a+b| \le |a|+|b|$
여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
즉, $ab \ge 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \ge ab, a = b$
② $|ab| \ge ab, |ab| = ab$
③ $|ab| \le ab, |ab| = ab$
④ $|ab| = ab, a = 0$
⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \ge ab$($\because$ $|ab|$는 항상 양수)
(나) : $2(|ab| - ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

33. $0 < a < b,\ a + b = 1$ 일 때 $1,\ \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{b} - \sqrt{a},\ \sqrt{b-a}$의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$

② $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $1 < \sqrt{b-a} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

먼저 주어진 식을 각각 제곱하면
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
$(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$
$(\sqrt{b-a})^2 = b - a$

이 때 $1 = a + b$ 이므로 $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{3}{4}$ 을 대입하여
크기를 예상하여 두 식의 차를 알아보면
$(a + b + 2\sqrt{ab}) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$
$\therefore 1 = a + b < a + b + 2\sqrt{ab} \cdots$ ㉠

$(a + b) - (b - a) = 2a > 0$
$\therefore b - a < a + b = 1 \cdots$ ㉡

$(b - a) - (a + b - 2\sqrt{ab})$
$= -2a + 2\sqrt{ab}$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}\ 0 > 0$
$\therefore a + b - 2\sqrt{ab} < b - a \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에서
$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} < 1 < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

34. 세 수 2^{60}, 3^{40}, 5^{30} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$
② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$
③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$
④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$
⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$\dfrac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{20} < 1$ 따라서 $2^{60} < 3^{40}$

$\dfrac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\dfrac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\dfrac{81}{125}\right)^{10} < 1$ 따라서 $3^{40} < 5^{30}$

$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

35. 두 수 $2^{30}, 3^{20}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{30} > 3^{20}$ ② $2^{30} \leq 3^{20}$ ③ $2^{60} > 3^{20}$
④ $2^{60} \geq 3^{20}$ ⑤ $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$\therefore 2^{30} < 3^{20}$

36. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $|a-b| \geq |a|-|b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$
$-a(a < 0)$
② 참
③ 참
④ $(|a+b+c|)^2$
$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$(|a|+|b|+|c|)^2$
$= a^2+b^2+c^2+2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)$
$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$
$\therefore |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$
⑤ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2\ (\because |a||b| \geq ab)$
$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$

37. 다음 [보기] 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, a, b, c 는 실수)

보기

㉠ $\dfrac{a}{b^2} < \dfrac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

㉢ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$

㉣ $|a| + |b| > |a + b|$

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉤ ② ㉡, ㉣, ㉠ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤ ⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

㉠ $\dfrac{a}{b^2} < \dfrac{c}{b^2}$

$\Rightarrow$ 양변에 b^2 을 곱하면

$a < c \ (\because b^2 > 0)$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림

㉢ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$

㉣ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0$

$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 틀림

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right\} \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

38. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$의 최소값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3\sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m,\ n\} = \{p, q, r\}$이므로

$lmn = pqr$이다.

따라서, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p,\ m = q,\ n = r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

39. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a}\times\frac{2c}{b}\times\frac{2a}{c}} = 3\times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$

40. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고 $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

코시-슈바르쯔의 부등식에 의하여
$(1^2+2^2+3^2)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)$
$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$
$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$
$\leq 14(a+b+c)=14^2$
$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이므로
$\therefore\ 0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$
따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

41. $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

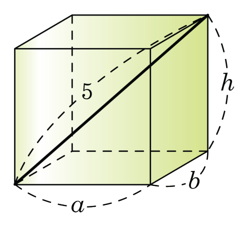
해설

$\left\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\right\}(1 + 4 + 9)$
$\geq (\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2$ 이므로
$(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2 \leq 140$

$\therefore\ 0 < \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} \leq \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$
$(\because x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$
$\therefore\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값은

$2\sqrt{35}$

42. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5 인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$　　② $4\sqrt{5}$　　③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$　　⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$ 의 최댓값

　: $20\sqrt{3}$

43. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가)이면 $x^2 + y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가)에서 $x^2 + y^2 >$ (나) 이므로 $x^2 + y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① $x > 1$ 이고 $y > 1$, 1 , 참
② $x > 1$ 이고 $y > 1$, 2 , 참
③ $x > 1$ 또는 $y > 1$, 2 , 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

44. 두 조건 $p : x \le 3 - a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$ ② $a > 7$ ③ $a > 3$

④ $a > -1$ ⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
$p \to \sim q$ 의 대우명제 $q \to \sim p$ 가 참이다.
p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
$Q \subset P^c$ 이므로
$P^c = \{x \mid 3 - a < x < a\}$,
$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로
$3 - a < -7$, $a > 7$
따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

45. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \rightarrow q$　② $q \rightarrow \sim p$　③ $s \rightarrow \sim q$

④ $\sim s \rightarrow \sim p$　⑤ $\sim r \rightarrow p$

해설

$p \rightarrow q \quad s \rightarrow \sim r \quad q \rightarrow r$

$q \rightarrow r$의 대우 : $\sim r \rightarrow \sim q$

$\therefore s \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow \sim q$ 이므로 $s \rightarrow \sim q$

46. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 <u>못한</u> 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots$ ㉠ $=\frac{4}{\sqrt{xy}}$ $\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡ $\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢ 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots\cdots$ ㉣

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣

⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$

즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.

47. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x \cdots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
㉠, ㉡을 대입하면
$2(6-x^2) \geq (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \leq 0$
$(3x-2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 2$
따라서 $M=2,\ m=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=3$

48. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, a, b, c는 실수)

㉠ $a,\ b,\ c$ 중 적어도 하나는 1보다 크다.
㉡ $a,\ b,\ c$ 의 최댓값이 1보다 크다.
㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1보다 크다.

① 필요, 충분, 필요충분
② 충분, 필요충분, 충분
③ 필요, 필요충분, 충분
④ 충분, 필요, 필요충분
⑤ 필요, 필요, 충분

해설

㉠ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면, $a-1,\ b-1,\ c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이 므로 필요조건 역으로 $a=2,\ b=2,\ c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아 니다.
$\therefore$ 필요조건
㉡ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면 $a,\ b,\ c$ 중 하나 또는 셋이 1 보다 크므로 최댓값은 1 보다 크다. 역으로 $a=2,\ b=2,\ c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아니다.
$\therefore$ 필요조건
㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1 보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이므로 충분조건 역으로 $a=2,\ b=0,\ c=0$ 이면 최솟값은 0 이 므로 필요조건은 아니다.
$\therefore$ 충분조건

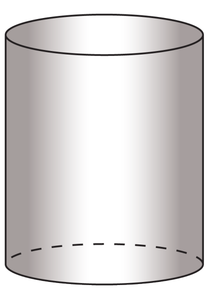
49. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a^2=b^2+c^2,\ b+c\le ka$ 를 만족하는 양의 상수 k의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b+c\le ka$에서 $b+c>0$이므로
$(b+c)^2\le k^2a^2,\quad (b+c)^2\le k^2(b^2+c^2)$
그러므로 $(k^2-1)b^2-2bc+(k^2-1)c^2\ge 0$
이 임의의 양수 $b,\ c$에 대하여 성립할 조건은
$k^2-1>0,\quad D/4=c^2-(k^2-1)^2c^2\le 0$
두 식에서 $k>0$이므로 $k\ge\sqrt{2}$
따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

50. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$ 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V=\pi x^2 y=64\cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S 라 하면
$S=(2x)^2\times 2+2\pi xy=8x^2+2x\pi y$
$=8x^2+2x\times\dfrac{64}{x^2}=8x^2+\dfrac{128}{x}$
$=8x^2+\dfrac{64}{x}+\dfrac{64}{x}\geq 3\sqrt[3]{8x^2\times\dfrac{64}{x}\times\dfrac{64}{x}}=96$
단, 등호는 $8x^2=\dfrac{64}{x}$ 일 때,
곧 $x=2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.