1. 점 P를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(3,\ -5)$라 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(0,\ -3)$　② $(-3,\ 0)$　③ $(6,\ -7)$
④ $(-7,\ 6)$　⑤ $(-6,\ 7)$

해설

$P(a,\ b)$를 조건에 의하여 이동하면 $(a+3,\ b-2)=(3,\ -5)$
따라서 $a=0,\ b=-3$

2. 직선 $y = 3x - 3$ 의 그래프를 직선 $y = x$에 대칭이동한 직선의 방정식은?

① $y = 3x + 1$　　② $y = \frac{1}{3}x + 1$　　③ $y = -\frac{1}{3} + 1$

④ $y = \frac{1}{3}x - 1$　　⑤ $y = 3x - 1$

해설

$y = x$ 대칭은 $x \to y$좌표로, $y \to x$를 대입한다.

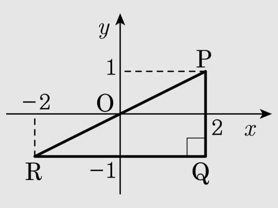
3. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 △PQR 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한
점 Q 는 Q (2, −1)
또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 R (−2, −1)
따라서, 다음 그림에서 세 점 P (2, 1), Q (2, −1), R (−2, −1) 을 꼭짓점으로 하는△PQR 의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times 4\times 2 = 4$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 y 축의 방향으로 b 만큼, 평행이동하면 직선 $4x - 3y - 4 = 0$ 에 접한다고 할 때 b 의 값은?(단, $b > 0$)

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

y 축 방향으로 b 이동시키면
$x^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 된다.
이 원과 $4x - 3y - 4 = 0$ 이 접하므로,
원 중심과 직선 사이 거리는 반지름과 같다.

$\Rightarrow \quad \frac{|-3 \times b - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$

$\Rightarrow \quad |-3b - 4| = 5$

$\Rightarrow \quad b = \frac{1}{3} \quad (\because \ b > 0)$

5. 원 $x^2+(y-2)^2=9$를 x축의 양의 방향으로 a만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x-1$과 접하였다. 이때, 양수 a의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}+1$ ② $2\sqrt{2}+2$ ③ $3\sqrt{2}+3$
④ $4\sqrt{2}+4$ ⑤ $5\sqrt{2}+5$

해설

원 $x^2+(y-2)^2=9$를 x 축의 양의 방향으로
a 만큼 평행이동하면
$(x-a)^2+(y-2)^2=9$
이 원이 직선 $x-y-1=0$ 에 접하므로
원의 중심 $(a,\ 2)$ 에서 직선까지의 거리 d 는
반지름의 길이와 같다.
$d=\dfrac{|a-2-1|}{\sqrt{1+1}}=3$, $a>0$ 이므로
$a=3\sqrt{2}+3$

6. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$ 이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로

$-k = -3$

$\therefore k = 3$

7. 점 $(-1,\ 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(-1,\ \ 2) \xrightarrow{\text{원점대칭}} (1,\ \ -2) \xrightarrow{x\text{축으로 }a\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2) \xrightarrow{y\text{축으로 }b\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2+b)$
$\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2+b,\ 1+a) = (3,\ 2)$
$\therefore\ a=1,\ b=5$

8. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ ② $x^2+y^2=1$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ④ $(x+1)^2+y^2=2$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설
평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1 인 ②이다.

9. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
$(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$을
$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
$-m-2n=-3$ ⋯ ㉠
점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
$(1+m,\ 2+n)$
$\Rightarrow\ \ 1+m=a,\ \ 2+n=b$
$\Rightarrow\ \ a+2b=m+1+4+2n=8$
($\because$ ㉠에서 $m+2n=3$)

10. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$ ② $a^2+b^2=9$ ③ $a^2+b^2=16$
④ $a^2+b^2=25$ ⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠
원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$
$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡
원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.
$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

11. 점 P 를 x축에 대해 대칭이동하고, x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y = -x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $x + y$의 값을 구하여라.

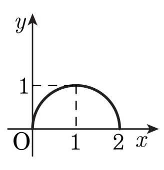
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

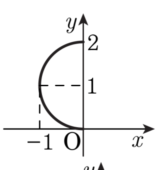
해설

P(a, b)를 x축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,
x축으로 -2만큼, y축으로 3만큼 평행이동
$\Rightarrow (a-2, -b+3)$
$y = -x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b-3, -a+2)$
다시 점P와 일치하므로
$b - 3 = a, -a + 2 = b$ 에서
$a - b = -3$ ······ ㉠
$a + b = 2$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$
$\therefore$ P$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

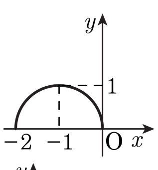
12. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?



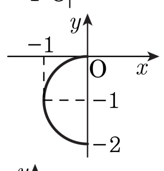
①



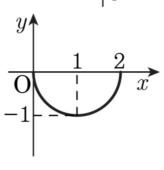
②



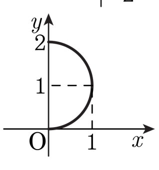
③



④



⑤



해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

13. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a,\ b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = x^2 - 3x \quad \cdots$ ㉠
$y = -x^2 + x + 6 \quad \cdots$ ㉡이라고 하자.
㉠, ㉡이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점P 이다.

㉠ : $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

㉡ : $y = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 꼭지점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{25}{4}\right)$

$\therefore$ 중점 $(1,\ 2)$ 이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 이다.
$\therefore\ a = 1,\ b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

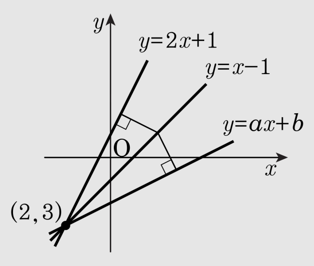
14. 직선 $y=2x+1$ 을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x-2y-3=0$　　② $x-2y-4=0$

③ $2x-3y+3=0$　　④ $2x-3y+4=0$

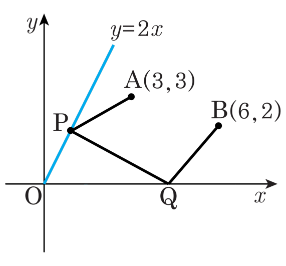
⑤ $2x-3y+5=0$

해설



i) 먼저 $y=2x+1$ 과$y=x-1$ 의 교점을 구하면 $(2,3)$ 이다.
그리고 이점은 $y=ax+b$ 를 지난다.
$\therefore 3=2a+b$
ii) 그리고 $y=x-1$ 의 임의의 점에서
$y=2x+1,\ \ y=ax+b$ 에 이르는 거리는 같다.
$y=ax+b$ 와의 거리 :
$\dfrac{|a+0+b|}{\sqrt{a^2+1}}$
$\Rightarrow\ \ \dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{|a+b|}{\sqrt{a^2+1}}$
i) 에서 구한
$2a+b=3$ 을 이용하여 연립하면
$a=2,\ \ b=1$ 또는 $a=\dfrac{1}{2},\ \ b=-2$
$\therefore\ \ y=\dfrac{1}{2}x-2$
($\because\ \ y=2x+1$ 는 두 직선이 일치)

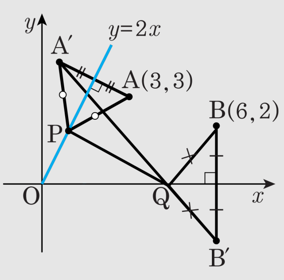
15. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}\,(3, 3)$, $\mathrm{B}\,(6, 2)$ 와 직선 $y = 2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB}}$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{11\sqrt{10}}{5}$
③ $\dfrac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{13\sqrt{10}}{5}$
⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 $\mathrm{A}\,(3, 3)$ 을 직선
$y = 2x$ 에
대하여 대칭이동한 점을 A′ 이라 하
고 점 B 를
x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B′
이라고 하면



$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}, \overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{B'Q}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB'}}$
$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$
따라서, 구하는 최솟값은 선분 A′B′ 의 길이이다.
이때, 점 $\mathrm{A'}\,(a, b)$ 라고 하면
직선 AA′ 과 직선 $y = 2x$ 가 수직이므로
$\dfrac{b-3}{a-3} \cdot 2 = -1$
$\therefore a + 2b = 9 \cdots\cdots$ ㉠
또한, 선분 AA′ 의 중점 $\left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b+3}{2}\right)$ 은
직선 $y = 2x$ 위에 있으므로
$\dfrac{b+3}{2} = 2 \cdot \dfrac{a+3}{2}$
$\therefore 2a - b = -3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a = \dfrac{3}{5},\ b = \dfrac{21}{5}$
$\therefore \mathrm{A'}\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{21}{5}\right)$
한편, 점 $\mathrm{B'}\,(6, -2)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{\left(6 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{21}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1690}{25}} = \frac{13\sqrt{10}}{5}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\dfrac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.