

1. 점 P를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(3, -5)$ 라 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(0, -3)$

② $(-3, 0)$

③ $(6, -7)$

④ $(-7, 6)$

⑤ $(-6, 7)$

해설

$P(a, b)$ 를 조건에 의하여 이동하면 $(a + 3, b - 2) = (3, -5)$
따라서 $a = 0, b = -3$

2. 직선 $y = 3x - 3$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대칭이동한 직선의 방정식은?

- ① $y = 3x + 1$ ② $y = \frac{1}{3}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{3}x + 1$
④ $y = \frac{1}{3}x - 1$ ⑤ $y = 3x - 1$

해설

$y = x$ 대칭은 $x \rightarrow y$ 좌표로, $y \rightarrow x$ 를 대입한다.

3. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한

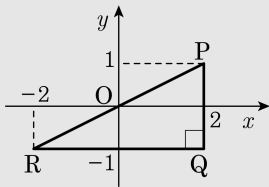
점 Q 는 Q (2, -1)

또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 R (-2, -1)

따라서, 다음 그림에서 세 점

P (2, 1), Q (2, -1), R (-2, -1) 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



4. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 y 축의 방향으로 b 만큼, 평행이동하면 직선 $4x - 3y - 4 = 0$ 에 접한다고 할 때 b 의 값은?(단, $b > 0$)

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

y 축 방향으로 b 이동시키면

$x^2 + (y - b)^2 = 1$ 이 된다.

이 원과 $4x - 3y - 4 = 0$ 이 접하므로,

원 중심과 직선 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|-3 \times b - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$$

$$\Rightarrow |-3b - 4| = 5$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{3} \quad (\because b > 0)$$

5. 원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 를 x 축의 양의 방향으로 a 만큼 평행이동하였더니 직선 $y = x - 1$ 과 접하였다. 이때, 양수 a 의 값을 구하면?

① $\sqrt{2} + 1$

② $2\sqrt{2} + 2$

③ $3\sqrt{2} + 3$

④ $4\sqrt{2} + 4$

⑤ $5\sqrt{2} + 5$

해설

원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 를 x 축의 양의 방향으로
 a 만큼 평행이동하면

$$(x-a)^2 + (y-2)^2 = 9$$

이 원이 직선 $x - y - 1 = 0$ 에 접하므로

원의 중심 $(a, 2)$ 에서 직선까지의 거리 d 는
반지름의 길이와 같다.

$$d = \frac{|a - 2 - 1|}{\sqrt{1+1}} = 3, a > 0 \text{ 이므로}$$

$$a = 3\sqrt{2} + 3$$

6. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한
직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로

$$-k = -3$$

$$\therefore k = 3$$

7. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3, 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} (-1, 2) &\xrightarrow{\text{원점대칭}} (1, -2) \xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}} (1 + a, -2) \\ &\xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}} (1 + a, -2 + b) \\ &\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2 + b, 1 + a) = (3, 2) \\ \therefore a = 1, b = 5 \end{aligned}$$

8. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$

⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1인 ②이다.

9. 점 $(1, 2)$ 를 점 (a, b) 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
 $(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$ 을
 $x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,

$$-m-2n=-3 \cdots \textcircled{7}$$

점 $(1, 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
 $(1+m, 2+n)$

$$\Rightarrow 1+m=a, \quad 2+n=b$$

$$\Rightarrow a+2b=m+1+4+2n=8$$

$$(\because \textcircled{7} \text{에서 } m+2n=3)$$

10. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$ 인 원을 x 축 방향으로 a 만큼 y 축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a^2 + b^2 = 4$

② $a^2 + b^2 = 9$

③ $a^2 + b^2 = 16$

④ $a^2 + b^2 = 25$

⑤ $a^2 + b^2 = 36$

해설

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9 \cdots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,

y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$\{(x-a)+3\}^2 + \{(y-b)-2\}^2 = 9$$

$$\{x-(a-3)\}^2 + \{y-(b+2)\}^2 = 9 \cdots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d 와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$$\therefore d = \sqrt{(a-3+3)^2 + (b+2-2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + 3 = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 36$$

11. 점 P 를 x 축에 대해 대칭이동하고, x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$P(a, b)$ 를 x 축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,
 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 3 만큼 평행이동
 $\Rightarrow (a - 2, -b + 3)$

$y = -x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b - 3, -a + 2)$

다시 점P와 일치하므로

$b - 3 = a, -a + 2 = b$ 에서

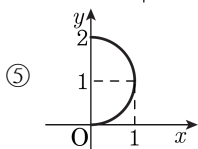
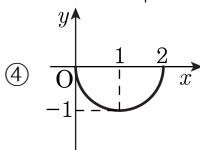
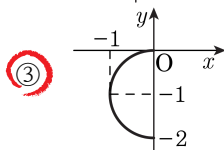
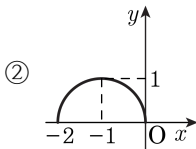
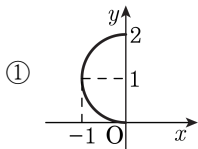
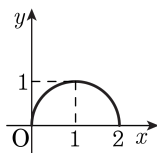
$$a - b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면, $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

12. 도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때,
 도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?



해설

도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프는

도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를

직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

13. 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 $y = -x^2 + x + 6$ 이 점 $P(a, b)$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = x^2 - 3x \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = -x^2 + x + 6 \quad \cdots \textcircled{㉡} \text{이라고 하자.}$$

㉠, ㉡ 이 점 $P(a, b)$ 에 대칭이면 두 곡선의 꼭지점의 중점이 점 P 이다.

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} : y &= x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad \text{꼭지점} \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{㉡} : y &= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6 \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad \text{꼭지점} \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \end{aligned}$$

$\therefore$ 중점 $(1, 2)$ 이 점 $P(a, b)$ 이다.

$\therefore a = 1, b = 2$ 이므로 $a + b = 3$

14. 직선 $y = 2x + 1$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$

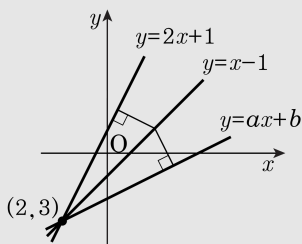
② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y + 3 = 0$

④ $2x - 3y + 4 = 0$

⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과 $y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.

$$\therefore 3 = 2a + b$$

ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서

$y = 2x + 1$, $y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.

$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한

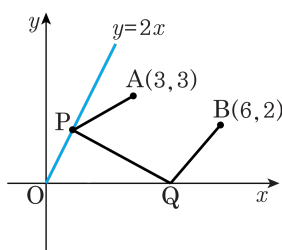
$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면

$$a = 2, b = 1 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 2$$

($\because y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)

15. 좌표평면 위에 두 점 $A(3,3)$, $B(6,2)$ 와 직선 $y = 2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
 ③ $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{10}}{5}$
 ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 $A(3,3)$ 을 직선 $y = 2x$ 에

대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하고 점 B 를

x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면

$\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$ 이므로

$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$

$\geq \overline{A'B'}$

따라서, 구하는 최솟값은 선분 $A'B'$ 의 길이이다.

이때, 점 $A'(a,b)$ 라고 하면

직선 AA' 과 직선 $y = 2x$ 가 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-3} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 9 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또한, 선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 은

직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+3}{2} = 2 \cdot \frac{a+3}{2}$$

$$\therefore 2a - b = -3 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore A'\left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

한편, 점 $B'(6, -2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &= \sqrt{\left(6 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{21}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1690}{25}} = \frac{13\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.

