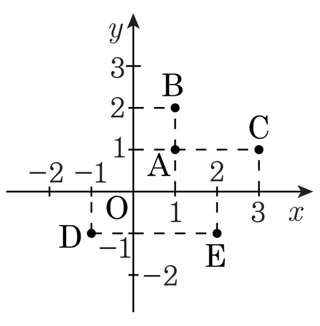
1. $z=a+bi$ 에서 실수 부분은 x 좌표, 허수 부분은 y 좌표라 하고, 좌표평면 위에 복소수를 순서쌍으로 표시한다고 하자. $\dfrac{1+2i}{i}$ 를 좌표평면에 표시하였을 때의 점을 고르면?



① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

$\dfrac{1+2i}{i}=\dfrac{(1+2i)i}{i\cdot i}=\dfrac{i-2}{-1}=2-i$ 이므로
좌표를 (실수부, 허수부) 라 하면 $(2,-1)$ 이므로
주어진 좌표는 E 이다.

2. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$ 을 $a + bi$ (a, b 는 실수) 형태로 나타내면?

① $2\sqrt{2} + 3i$　② $-3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$　③ $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}i$

④ $2\sqrt{3}i$　⑤ $3\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$

$= \sqrt{3}i \times \sqrt{6}i - \frac{2\sqrt{2}}{2i}$

$= -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

3. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$ ② $-1+i$ ③ $2i$

④ $2+i$ ⑤ 2

해설

$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$
$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$
$=-1+i$

4. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

5. 이차방정식 $x^2 - x + 4 = 0$ 의 근을 구하면?

① $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ② $x = 1 \pm \sqrt{15}$ ③ $x = -1 \pm \sqrt{15}i$
④ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용한다.

$x^2 - x + 4 = 0, \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

6. 이차방정식 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$의 한 근이 1일 때 다른 한 근은? (단, m은 상수)

① 3 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$에 $x = 1$을 대입하면

$1 - m + 2m + 1 = 0 \quad \therefore m = -2$

$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (x+3)(x-1) = 0$

$\therefore x = -3,\ 1$

따라서, 다른 근은 -3

7. x에 대한 이차방정식 $kx^2-x-(k+7)=0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하면?(단 k는 상수)

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

방정식에 $x=2$를 대입하면

$k\cdot 2^2-2-(k+7)=0$

$4k-2-k-7=0$, $3k=9$,

$\therefore\ k=3$

$3x^2-x-10=0$, $(3x+5)(x-2)=0$

$\therefore\ x=2, -\frac{5}{3}$

8. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 1　② 3　③ 4　④ 8　⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 8 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = 11\end{aligned}$$

9. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야 하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

10. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3$, $x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

11. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉣　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

12. 복소수 $z = i(a+\sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① 5　② $\sqrt{5}$　③ 0　④ ± 5　⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$z = i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i)$
$\quad = -2a\sqrt{5} + (a^2-5)i$
$z = \bar{z}$ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.
$\therefore\ a = \pm\sqrt{5}$

13. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3
④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,
$a < 0,\ \ b \geq 0$ 이다.
따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$
$\therefore\ -1 < x < 2$
$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

14. 방정식 $|x-1|=2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

ⅰ) $x \geq 1$ 일 때
$|x-1| = x-1$ 이므로, $x-1=2$
$\therefore x=3$
ⅱ) $x<1$ 일 때
$|x-1| = -x+1$ 이므로, $-x+1=2$
$\therefore x=-1$
따라서 (ⅰ), (ⅱ) 에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

15. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2$, $k=10$이므로 k의 값은 12이다.

16. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$D = p^2 - 4(2p+1)$

$\quad = p^2 - 8p - 4 = 0$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

17. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$　② $-1 < a < 0$　③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$　⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

18. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

19. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

20. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

21. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$= -3+2=-1$

22. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a - 5 = 0$ 의 두 실근을 β, β^2 이라 할 때, $a + \beta + \beta^2$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta + \beta^2 = -a - 1$ 이므로
$a + \beta + \beta^2 = a - a - 1 = -1$

23. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선　　② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선　　④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$(3-4i)\,z = (3-4i)(x+yi)$$
$$= (3x+4y) + (-4x+3y)\,i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x + 3y = 0$이다.

$\therefore y = \dfrac{4}{3}x$ (⇒ 기울기가 양인 직선)

24. $f(x) = \frac{x}{1+i}$, $g(x) = \frac{x}{1-i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\{f(1-i)\}^{100} + \{g(1+i)\}^{100}$의 값을 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$f(1-i) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$

$g(1+i) = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$ 이므로

$\left\{f(1-i)\right\}^{100} + \left\{g(1+i)\right\}^{100}$

$= (-i)^{100} + (i)^{100}$

$= 1 + 1 = 2$

25. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore\ a = -2, b = -4$

$\therefore\ a + b = -6$

26. $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4-\bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$　　② $-\sqrt{3}i$　　③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$　　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} \\ &= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

$\therefore\ 2z+1=\sqrt{3}i\cdots$①

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$4z^2+4z+1=-3 \Leftrightarrow z^2+z+1=0\cdots$②

②의 양변에 $z-1$을 곱해주면

$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z^3=1$

$\therefore\ z^3=1$ 이므로 $z^4=z$

$$\begin{aligned} \therefore z^4-\bar{z} &= z-\bar{z} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

27. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

28. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

29. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \dfrac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

30. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

31. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$ 이 m에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a+3b$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x^2+2\cdot(m+a-2)x+(m^2+a^2-3b)=0$

중근을 가지려면 $\dfrac{D}{4}=0$

$(m+a-2)^2-1\cdot(m^2+a^2-3b)=0$

m에 대한 항등식이므로

정리해서 m으로 묶으면,

$m\cdot(2a-4)+(4-4a+3b)=0$

$a=2, 3b=4a-4=4$

$\therefore\ a+3b=6$

32. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

33. 복소수 $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$로 나타낸다.$\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$　　② $3+3i$　　③ $2+3i$
④ $1+3i$　　⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4\\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

34. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1+\sqrt{3}i$

$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= \alpha(\alpha^2+\alpha+1) + (\alpha^2+\alpha+1) + 4$

$= 4$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= (\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1) + 4$

$= 4$ ($\because$ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$)

35. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4　② 2　③ −1　④ 5　⑤ −5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

36. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

37. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3
④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$
$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢
$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$
$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣
㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$
$\therefore\ q = 2$
㉢에 대입하여 정리하면,
$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$
$\therefore\ p = -1,\ 4$

38. 이차방정식 $x^2 - 2x - 4 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha) = 3$, $f(\beta) = 3$, $f(1) = -2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x) = 0$를 구하면?

① $x^2 - 2x - 4 = 0$　　② $x^2 - 4x - 1 = 0$

③ $x^2 - x - 4 = 0$　　④ $x^2 - x + 4 = 0$

⑤ $x^2 - 2x - 1 = 0$

해설

$x^2 - 2x - 4 = 0$의 두 근이 α, β이고
$f(x) = ax^2 + bx + c$라 하면
$ax^2 + bx + c = 3$에서 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$
$\therefore -\frac{b}{a} = \alpha + \beta = 2$
또, $\frac{c-3}{a} = \alpha\beta = -4$
$f(1) = a + b + c = -2$이므로
$a = -b - c - 2$, $b = -2a$에서
$b = -2(-b - c - 2) = 2b + 2c + 4$
$\therefore b + 2c + 4 = 0$
$c - 3 = -4a$에서
$c = -4(-b - c - 2) + 3 = 4b + 4c + 11$
연립하여 풀면 $c = -1$, $b = -2$, $a = 1$
$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 1$

39. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로
$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0, \quad k(k-6) < 0$
$\therefore \ 0 < k < 6$
한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$\omega + \overline{\omega} = -2k, \ \omega\overline{\omega} = 6k$이므로
$\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega\overline{\omega} = (-2k)^2 - 12k$
$= 4k^2 - 12k$
$4k^2 - 12k = 16,$
즉, $k^2 - 3k - 4 = 0$ 에서
$(k+1)(k-4) = 0 \qquad \therefore \ k = -1$ 또는 $k = 4$
$0 < k < 6$ 이므로 $k = 4$

40. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$　② $2 \le m < 3$　③ $-1 < m < 3$
④ $1 < m \le 3$　⑤ $3 < m \le 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \ge 0$

$m^2 - m - 2 \ge 0,\ (m-2)(m+1) \ge 0$

$\therefore\ m \le -1,\ m \ge 2$

(ii) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore\ m > 1$

(iii) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore\ m < 3$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)의 공통범위는 $2 \le m < 3$