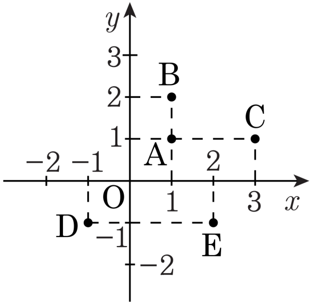
1. $z=a+bi$ 에서 실수 부분은 x 좌표, 허수 부분은 y 좌표라 하고, 좌표평면 위에 복소수를 순서쌍으로 표시한다고 하자. $\dfrac{1+2i}{i}$ 를 좌표평면에 표시하였을 때의 점을 고르면?



① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

$$\frac{1+2i}{i}=\frac{(1+2i)i}{i\cdot i}=\frac{i-2}{-1}=2-i$$ 이므로

좌표를 (실수부, 허수부) 라 하면 $(2,-1)$ 이므로

주어진 좌표는 E 이다.

2. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$ 을 $a + bi$ (a, b 는 실수) 형태로 나타내면?

① $2\sqrt{2} + 3i$　　② $-3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$　　③ $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}i$

④ $2\sqrt{3}i$　　⑤ $3\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$$

$$= \sqrt{3}i \times \sqrt{6}i - \frac{2\sqrt{2}}{2i}$$

$$= -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

3. 허수단위 i에 대하여 $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$을 간단히하면?

① $1+i$　　② $-1+i$　　③ $2i$

④ $2+i$　　⑤ 2

해설

$i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$
$=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)$
$=-1+i$

4. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

5. 이차방정식 $x^2 - x + 4 = 0$ 의 근을 구하면?

① $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ② $x = 1 \pm \sqrt{15}$ ③ $x = -1 \pm \sqrt{15}i$

④ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용한다.

$x^2 - x + 4 = 0,\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

6. 이차방정식 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$의 한 근이 1일 때 다른 한 근은? (단, m은 상수)

① 3 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$에 $x = 1$을 대입하면

$1 - m + 2m + 1 = 0 \quad \therefore m = -2$

$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (x+3)(x-1) = 0$

$\therefore x = -3,\ 1$

따라서, 다른 근은 -3

7. x에 대한 이차방정식 $kx^2-x-(k+7)=0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하면?(단 k는 상수)

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

방정식에 $x=2$를 대입하면

$k\cdot 2^2-2-(k+7)=0$

$4k-2-k-7=0,\ 3k=9,$

$\therefore\ k=3$

$3x^2-x-10=0,\ (3x+5)(x-2)=0$

$\therefore\ x=2, -\frac{5}{3}$

8. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 8 - 3 \times (-\frac{1}{2}) \times 2 = 11$$

9. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

10. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

11. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$$= (a+1+bi)(a+1-bi)$$

$$= (a+1)^2 + b^2 \text{ (실수)}$$

12. 복소수 $z = i(a+\sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① 5 ② $\sqrt{5}$ ③ 0 ④ ± 5 ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$z = i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i)$

$\quad = -2a\sqrt{5} + (a^2-5)i$

$z = \bar{z}$ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.

$\therefore\ a = \pm\sqrt{5}$

13. 실수 x에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0, \quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

14. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$일 때
$|x-1| = x-1$이므로, $x-1=2$
$\therefore x = 3$
ii) $x < 1$일 때
$|x-1| = -x+1$이므로, $-x+1=2$
$\therefore x = -1$
따라서 (i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

15. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
$D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
$(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2,\ k = 10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

16. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$$D = p^2 - 4(2p+1)$$
$$= p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

17. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a+3)x + a^2 + 7 = 0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$$

$$6a + 2 \geq 0 \qquad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

18. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

19. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

20. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a = 2 + 3$, $a = -5$

$b = 2 \cdot 3 = 6$

$\therefore\ -5x^2 + 6x + 3 = 0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

21. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$
$$= -3+2 = -1$$

22. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a-5=0$의 두 실근을 β, β^2이라 할 때, $a+\beta+\beta^2$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta+\beta^2=-a-1$이므로

$a+\beta+\beta^2=a-a-1=-1$

23. 복소수 $z=x+yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선
② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$(3-4i)z=(3-4i)(x+yi)$$
$$=(3x+4y)+(-4x+3y)i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y=\dfrac{4}{3}x$ (⇒기울기가 양인 직선)

24. $f(x)=\dfrac{x}{1+i}$, $g(x)=\dfrac{x}{1-i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\{f(1-i)\}^{100}+\{g(1+i)\}^{100}$의 값을 구하면?

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{2}{3}$　④ 2　⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

$$f(1-i)=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$$

$$g(1+i)=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$$ 이므로

$$\left\{f(1-i)\right\}^{100}+\left\{g(1+i)\right\}^{100}$$
$$=(-i)^{100}+(i)^{100}$$
$$=1+1=2$$

25. 두 복소수 $\alpha = a - 2i,\ \beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3-2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3-2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore\ a = -2, b = -4$

$\therefore\ a + b = -6$

26. $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4 - \bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$ ② $-\sqrt{3}i$ ③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} \\ &= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

$\therefore\ 2z+1 = \sqrt{3}i \cdots ①$

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$4z^2+4z+1 = -3 \Leftrightarrow z^2+z+1 = 0 \cdots ②$

②의 양변에 $z-1$을 곱해주면

$(z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1$

$\therefore\ z^3 = 1$ 이므로 $z^4 = z$

$$\begin{aligned} \therefore z^4 - \bar{z} &= z - \bar{z} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

27. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

28. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$
ⅱ) $x<0$일 때
$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$
$x=1$ 또는 $x=-3$
그런데 $x<0$이므로 $x=-3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$
따라서 근의 합은 0이다.

29. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \dfrac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

30. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때

$$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$$

$\therefore a<1$

따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때

$$\frac{D}{4}=2-2a=0$$

$\therefore a=1$

따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때

$$\frac{D}{4}=2-2a<0$$

$\therefore a>1$

따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

31. x에 관한 이차방정식$x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a+3b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x^2+2\cdot(m+a-2)x+(m^2+a^2-3b)=0$

중근을 가지려면 $\dfrac{D}{4}=0$

$(m+a-2)^2-1\cdot(m^2+a^2-3b)=0$

m에 대한 항등식이므로

정리해서 m으로 묶으면,

$m\cdot(2a-4)+(4-4a+3b)=0$

$a=2, 3b=4a-4=4$

$\therefore\ a+3b=6$

32. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$$

B는 a와 b는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

33. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)에 대하여 $\alpha^* = b + ai$로 나타낸다.$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$　　② $3+3i$　　③ $2+3i$

④ $1+3i$　　⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha\cdot a^*)^4\\ &= 5\cdot\frac{4+3i}{5}\cdot i^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

34. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 의 값을 구하면?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1+\sqrt{3}i$

$2\alpha+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$

$=\alpha(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha+1)+4$

$=4$

해설

$\alpha^2+\alpha+1=0$ 을 얻은 후 $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 를 $\alpha^2+\alpha+1$ 로 나누면

$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$

$=(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)+4$

$=4\ (\because\ \alpha^2+\alpha+1=0)$

35. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4　　② 2　　③ -1　　④ 5　　⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

36. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$$

정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

37. 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2-3px+4(q-1)=0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3

④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q\cdots\cdots$㉠

$\alpha^2+\beta^2=3p,\ \alpha^2\beta^2=4(q-1)\cdots\cdots$㉡

㉠,㉡에서

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\therefore\ 3p=p^2-2q\cdots\cdots$㉢

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2$

$\therefore\ 4(q-1)=q^2\cdots\cdots$㉣

㉣에서 $q^2-4q+4=0,\ (q-2)^2=0$

$\therefore\ q=2$

㉢에 대입하여 정리하면,

$p^2-3p-4=0,\ (p+1)(p-4)=0$

$\therefore\ p=-1,\ 4$

38. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$, $f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$ ② $x^2-4x-1=0$

③ $x^2-x-4=0$ ④ $x^2-x+4=0$

⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2$, $b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1$, $b=-2$, $a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

39. x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+6k=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2+\overline{\omega}^2=16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

방정식 $x^2+2kx+6k=0$ 이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=k^2-6k<0,\quad k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-2k,\ \omega\overline{\omega}=6k$이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-2k)^2-12k$

$=4k^2-12k$

$4k^2-12k=16,$

즉, $k^2-3k-4=0$ 에서

$(k+1)(k-4)=0\qquad\therefore\ k=-1$ 또는 $k=4$

$0<k<6$ 이므로 $k=4$

40. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$ ② $2 \leq m < 3$ ③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \leq 3$ ⑤ $3 < m \leq 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(ⅰ) $\dfrac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \geq 0$

$m^2 - m - 2 \geq 0$, $(m-2)(m+1) \geq 0$

$\therefore\ m \leq -1,\ m \geq 2$

(ⅱ) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore\ m > 1$

(ⅲ) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore\ m < 3$

$\therefore$ (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 공통범위는 $2 \leq m < 3$