

1. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \rightarrow 1$

② $x \rightarrow |x|$

③ $x \rightarrow x^2 + 1$

④ $x \rightarrow 2x$

⑤ $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

2. $X = \{x \mid x \text{는 } 10\text{이하의 자연수}\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 $f(x) = (x \text{의 양의 약수의 갯수})$ 로 정의할 때, 함수 f 의 치역의 원소의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, f(2) = f(3) = f(5) = f(7) = 2, \\ f(4) &= f(9) = 3 \\ f(6) &= f(8) = f(10) = 4 \\ \therefore f(X) &= \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

3. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

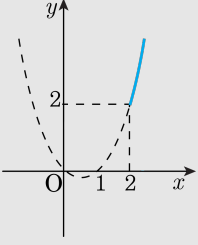
$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

4. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x|x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역)이므로
(정의역)=(치역)이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
 $f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
 $\therefore k = 2$



5. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$

㉡ $g(x) = x^2$

㉢ $h(x) = -x$

㉣ $k(x) = |x|$

- ① 4 개 ② 3 개 ③ 2 개 ④ 1 개 ⑤ 없다

해설

이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응,
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2 개

6. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것은 무엇인가?

$$\textcircled{1} \quad y = -x^2$$

② $y = -|x|$

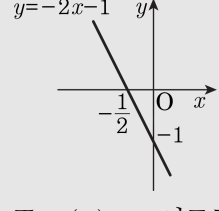
③ $y = 3$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.



② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) \equiv f(1) \equiv -$

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)
 ③ 모든 $x \in Y$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합)이므로 일대일 대응이다.

⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이므로

일대일 함수이지만 (공역) $\neq$ (치역)이다.

7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 8 개

▷ 정답 : 8 개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

8. 실수의 집합을 R 이라 할 때, 함수 $f : R \rightarrow R$ 가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ ② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$ ④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \frac{1}{x}$

해설

지역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.

①은 직선으로서 $a > 0$ 이면 증가하고 $a < 0$ 이면 감소하는 그래프이다.

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x+1) = f(x+2)$ 로 정의될 때, $g(0)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$g(x+1) = f(x+2)$ 에 $x = -1$ 을 대입하면

$g(0) = f(1)$

$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore g(0) = 0$

10. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

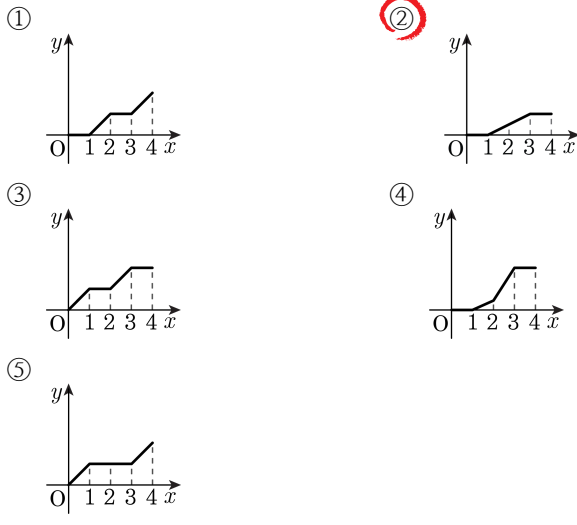
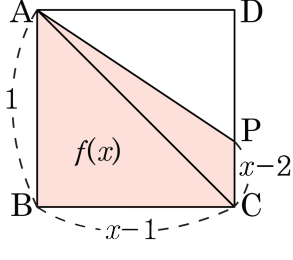
$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

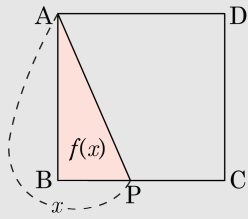
즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

12. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \quad \text{한편, 각 구간의 경계점에서}$$

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

13. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

- ① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$
일대일 대응의 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

14. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개 ② 20 개 ③ 24 개 ④ 28 개 ⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$
 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

15. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 가 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에서 정의되어 있을 때, $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X 의 원소의 개수를 a 개라 할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4개

해설

$f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면

$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ 에서 $(x+2)$ 가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$ 가 2의 배수인 x 는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

1) $(x+2)$ 가 4의 배수일 경우 : $x = 2, 6, 10$

2) $(x-1)$ 이 4의 배수일 경우 : $x = 1, 5, 9$

2) $(x-1)$ 이 4의 배수일
 $\therefore x-1 = 2, 5, 6, 9, 10$

$\therefore x = 1, 2, 5, 6, 9, 10$
따라서 $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 3, 4, 7, 8의 4개이다.

$$\therefore a = 4$$

16. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

- 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$

· 임의의 실수 x, y 에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립한다.

이 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

- (i) $f(0) = 2$

(ii) $f(-x) = -f(x)$

(iii) $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$

(iv) $\{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2$
 $= f(x+y)f(x-y) + 4$

- ① i , ii

② i , ii, iii

③ i , iii, iv

④ ii, iii, iv

⑤ i , ii, iii, iv

해설

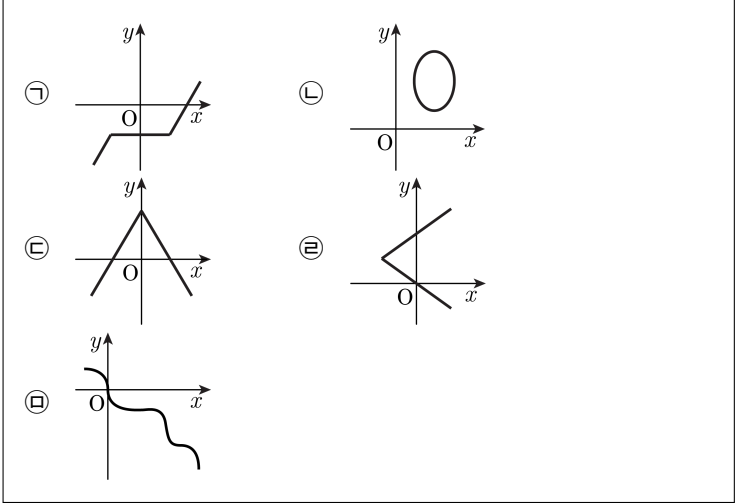
(i) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0)f(0) = f(0+0) + f(0-0)$ 이다.
정리하면 $\{f(0)\}^2 - 2f(0) = 0$
 $f(0)(f(0) - 2) = 0$ 이므로
 $\therefore f(0) = 2$ ($\because f(x) \neq 0$)

(ii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
 $x = 0, y = x$ 를 대입하면
 $f(0)f(x) = f(0+x) + f(0-x)$ 이다.
 $2f(x) = f(x) + f(-x)$ ($\because f(0) = 2$)
 $\therefore f(-x) = f(x)$ 이므로 ii 는 옳지 않다.

(iii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $y = x$ 를 대입하면
 $f(x)f(x) = f(x+x) + f(x-x)$ 이다.
 $f(2x) = \{f(x)\}^2 - f(0)$
 $\therefore f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ ($\because f(0) = 2$)

(iv) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
 $x = x+y, y = x-y$ 를 대입하면
 $f(x+y)f(x-y) = f((x+y) + (x-y)) + f((x+y) - (x-y))$
 $f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$ 이다.
 $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ 을 $f(2x), f(2y)$ 에 적용하면
 $f(x+y)f(x-y) = \{f(x)\}^2 - 2 + \{f(y)\}^2 - 2$ 이다.
 $\therefore \{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 = f(x+y)f(x-y) + 4$

17. 다음 그래프 중 함수인 것은?



- ① ㉠, ㉡, ㉢
- ② ㉠, ㉢, ㉤
- ③ ㉠, ㉢, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉤
- ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 함수
㉡ 함수가 아니다.
㉢ 함수
㉣ 함수가 아니다.
㉤ 함수
따라서 ㉠, ㉢, ㉤만이 함수이다.

18. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

- (i) $i \neq j$ 일 때 $f(i) \neq f(j)$,
(ii) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i) , 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \neq f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$\rightarrow (a - 1)(a - 4) = 0$$

$$\therefore a = 1, 4$$

$$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$\rightarrow (b - 1)(b - 4) = 0$$

$$\therefore b = 1, 4$$

$$\therefore a = 1, b = 4 (\because 0 < a < b)$$

$$\therefore a + b = 5$$