

1. 다음 중 명제가 아닌 것을 모두 고르면?

- ① 무궁화 꽃은 아름답다.
- ② 한국의 수도는 서울이다.
- ③ $1 + 2 < 5$
- ④ $x + 1 = 4$
- ⑤ 대학에 가고 싶다.

해설

①, ⑤ 감탄문, 희망사항, 명령, 주관적인 견해 등은 참, 거짓을 판단할 수 없으므로 명제가 아니다. ②, ③ 참인 명제이다. ④ $x = 3$ 인 경우는 참이지만 $x \neq 3$ 인 경우는 거짓이다. 따라서 x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $a < b$ 이면 $a + c > b + c$
- ② $a < b$ 이면 $a - c > b - c$
- ③ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $ac > bc$
- ④ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- ⑤ $ac < bc$ 이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

- i) 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a > b, a = b, a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.
 - ii) $a > b, b > c$ 이면 $a > c$
 - iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$
 - iv) $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$
 - v) $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$
- 따라서 참인 것은 ④이다.

3. 다음 중 명제 ' $x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

$x + y \geq 2, xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x = 100, y = \frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

4. $x-1=0$ 이 $2x^2+ax-1=0$ 이기 위한 충분조건일 때 상수 a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x-1=0$ 이면 $2x^2+ax-1=0$ 이 참이므로
 $x=1$ 을 대입하면 $2+a-1=0$
 $\therefore a=-1$

5. 다음 빈 칸에 알맞은 말을 써 넣어라.

$A \cap B = A$ 인 것은 $A \subset B$ 이기 위한 조건이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요충분

해설

$A \cap B = A$ 인 것이 곧, $A \subset B$ 을 의미하므로 명제와 역 모두 참이 되는 필요충분조건이다.

6. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$

④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

7. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$

② $P \cup Q$

③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$

⑤ $Q - P$

해설

$p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

8. 다음 중 ‘모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.’의 부정인 명제를 고르면?
- ① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.
 - ② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.
 - ③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.
 - ④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.
 - ⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) $\Rightarrow$ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

9. 명제 p , q , r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?
- ① 필요 ② 충분
③ 필요충분 ④ 아무 조건도 아니다.
⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
 즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
 즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
 그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
 따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

10. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n 이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n 이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$
 $p_2 : 16$ 의 양의 약수는 모두 짝수이다.
 $p_3 : \sqrt{3}$ 은 유리수이다.

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 & (p_n \text{이 명제이다.}) \\ -1 & (p_n \text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다. ($\because x$ 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

$p_2 : \text{거짓}, p_3 : \text{거짓} \rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$$\therefore f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) = (-1) + 1 + 1 = 1$$

11. $a, b, c \in R$ 일 때, 조건 $a = b = c$ 의 부정을 바르게 말한 것은?

- ① a, b, c 는 모두 다르다.
- ② a, b, c 는 모두 다르지 않다.
- ③ a, b, c 중에는 같은 수가 있다.
- ④ a, b, c 중에는 0이 아닌 수가 있다.
- ⑤ a, b, c 중에는 다른 두 수가 있다.

해설

① : $a = b = c \Rightarrow a = b$ 이고, $b = c$ 이고, $c = a$ 이다.
부정 : $a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a \Rightarrow a, b, c$ 중에는 다른 두 수가 있다.

12. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 ' $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$

② $P \cup Q^c$

③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$

⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

' $\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 ' q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \emptyset$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

13. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
' $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

대우 : $x = 0, y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

14. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cup Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$ 이다. 따라서, $q \Rightarrow p$

15. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p, q, r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$

- ① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow r$

③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$

$\therefore Q \subset P, Q \subset R$ 이므로 $q \rightarrow p, q \rightarrow r$ (참)

16. 전체집합을 $U = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 전체집합 U 에 대하여 다음 중 참인 명제는?

- ① 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$ 이다.
- ② 임의의 x, y 에 대하여 $x + y \leq 1$ 이다.
- ③ 어떠한 x 에 대하여도 $x^2 + 2x \geq -1$ 이다.
- ④ 적당한 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$ 이다.
- ⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x 가 존재한다.

해설

- ① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \geq 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
- ④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \leq 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \geq x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

17. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 8 가지

▷ 정답 : 8 가 지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$

18. 명제 ' $x^2 + 2x + a \neq 0$ 이면 $x + 1 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 3

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

대우인 ' $x + 1 = 0$ 이면 $x^2 + 2x + a = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

19. 다음 보기의 명제 중 그 역이 참인 것을 모두 몇 개인가? (단 a, b, c 는 실수)

보기

- ㉠ $a > 0$ 이면 $\frac{1}{a} > 0$ 이다.
- ㉡ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.
- ㉢ $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.
- ㉣ $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$ 이다.
- ㉤ $a > b$ 이면 $a + c > b + c$ 이다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠, ㉤의 역이 참이다.

20. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

- ① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.
- ② x 가 3의 배수이면 $x + 1$ 은 짝수이다.
- ③ 4 의 배수는 2 의 배수이다.
- ④ $2x > x + 3$ 이면 $x > 3$ 이다.
- ⑤ $x + y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

‘역’의 대우인 ‘이’가 참인지 확인 한다.
① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례 : $x = 2$
② x 가 3 의 배수가 아니면 $x + 1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례 : $x = 5$
③ 4의 배수가 아니면 2의 배수가 아니다 (거짓) 반례 : 6
④ $2x \leq x + 3 \rightarrow x \leq 3$ (참)
⑤ $x + y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

21. 두 조건 $p : x - 2 \neq 0$, $q : x^2 - ax + 2 \neq 0$ 에서 $q \rightarrow p$ 가 참일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$ 가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - ax + 2 = 0 \therefore a = 3$

22. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 a 의 최댓값, 최솟값의 합은?

- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$ 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 와 동치임을 이용
 $\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.
 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$,
 $x = -3, 1$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.
1) $x = -3 : 9 + 3a - 6 \leq 0 \rightarrow a \leq -1$
2) $x = 1 : 1 - a - 6 \leq 0 \rightarrow a \geq -5$
 $\therefore -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

23. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim p \rightarrow r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $q \rightarrow \sim p$
- ② $\sim r \rightarrow p$
- ③ $q \rightarrow r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim q$
- ⑤ $q \rightarrow \sim r$

해설

$p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 대우
 $\frac{q \rightarrow \sim p^{(1)}}{\text{㉠}}$ 도 참이다.

$\frac{\sim p \rightarrow r}{\text{㉡}}$ 가 참이면 대우 $\sim r \rightarrow p^{(2)}$ 도 참이다.

㉠, ㉡에서 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이고 $\sim p \rightarrow r$ 가 참이므로 $q \rightarrow r^{(3)}$ 도 참이다.

또한, $q \rightarrow r$ 가 참이므로 대우인 $\sim r \rightarrow \sim q^{(4)}$ 도 참이다.

따라서, 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

24. 선영, 나영, 해영은 세 자매이다. 세 사람은 자신들을 소개하는 자리에서 다음과 같이 말하였다.

선영 : 나는 둘째이다.
나영 : 나는 둘째가 아니다.
해영 : 나는 셋째가 아니다.

위의 세 명의 말 중 하나만 참일 때, 첫째, 둘째, 셋째를 차례로 나타낸 것은?

- ① 선영, 해영, 나영

② 해영, 나영, 선영

③ 해영, 선영, 나영

④ 나영, 해영, 선영

⑤ 나영, 선영, 해영

해설

선영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 둘이 되므로 모순
나영이의 말이 진실이라고 가정하면 둘째가 없으므로 모순
해영이의 말이 진실이라고 가정하면 해영은 셋째가 아닌데 나영이가 둘째이므로 해영이가 첫째 선영이는 둘째가 아니므로 선영이가 셋째가 되어 모순이 없다.
∴ 해영이가 진실을 말하고 있으며, 해영이가 첫째, 나영이는 둘째, 선영이는 셋째이다.

25. 다음은 ‘ a, b, c 가 자연수일 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’임을 증명한 것이다.

a, b 가 모두 (가)가 아니라고 가정하면, $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2 + b^2 = 3M + (\text{나})$ (단, M 은 자연수) $\cdots \text{㉠}$
또, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)라 하면, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M'' + (\text{다})$ (단, M', M'' 은 자연수)가 되어 ㉠의 $3M + (\text{나})$ 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

- ① 자연수, 1, 2
- ② 자연수, 2, 1
- ③ 3의 배수, 1, 2
- ④ 3의 배수, 2, 1
- ⑤ 3의 배수, 2, 2

해설

a, b 가 모두 3의 배수가 아니라고 가정하면
 $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2 + b^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3(3(m^2 + n^2) \pm 2(m + n)) + 2 = 3M + 2$ (단, M 은 자연수) $\cdots \cdots \text{㉠}$
한편, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)로 놓을 수 있으므로
 $c^2 = 9l^2$ 또는 $c^2 = (3l \pm 1)^2 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1$
즉, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M + 1$ (단, M', M 은 자연수)의 꼴이 되어 ㉠의 $3M + 2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

27. 다음 ()에 『필요, 충분, 필요충분』 중에서 알맞은 것을 차례대로 써 넣어라.

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 ()조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 ()조건이다.

▶ 답: 조건

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 충분조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 충분 조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 필요 조건이다.

28. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단, a, b 는 실수)

(i) $p : a, b$ 는 유리수, $q : a + b, ab$ 는 유리수
(ii) $p : x$ 는 3의 배수, $q : x$ 는 6의 배수

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

29. x, y, z 가 실수일 때, 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은?
- ① $p : x$ 는 2 의 배수, $q : x$ 는 6 의 배수
 - ② $p : x$ 는 16 의 약수, $q : x$ 는 8 의 약수
 - ③ $p : x > 0$ 또는 $y > 0$, $q : x + y > 0$
 - ④ $p : (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$, $q : x = y = z$
 - ⑤ $p : x, y$ 는 정수, $q : x + y, xy$ 는 정수

해설

- ① 2 의 배수 중 4 는 6 의 배수가 아니므로 $p \not\Rightarrow q$
6 의 배수는 모두 2 의 배수이므로 $p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ② 16 의 약수 중 16 은 8 의 약수가 아니므로 $p \not\Rightarrow q$
8 의 약수는 모두 16 의 약수이므로 $p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ③ $x = 1, y = -3$ 이면 $x + y = -2 < 0$ 이므로 $p \not\Rightarrow q$
 $x + y > 0$ 이면 $x > 0$ 또는 $y > 0$ 이므로 $p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ④ $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x - y = y - z = z - x = 0 \Leftrightarrow x = y = z$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ⑤ x, y 가 정수이면 $x + y, xy$ 도 정수이므로 $p \Rightarrow q$
 $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 $x + y, xy$ 는 정수이지만 x, y 는 정수가 아니므로 $p \not\Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

30. x, y 가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$ 가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$

⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore |xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

31. 다음 보기중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건이 되는 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $p : xy > 0, q : |x| + |y| = |x + y|$
- ㉡ $p : xy < 0, q : |x| + |y| > |x + y|$
- ㉢ $p : xy \leq 0, q : ||x| - |y|| = |x + y|$
- ㉤ $p : x^2 > y^2, q : x^3 > y^3$
- ㉥ $p : \text{임의의 실수 } a \text{ 에 대하여 } ax + y = 0,$
 $q : |x| + |y| = 0$

- ① ㉠, ㉡, ㉢
- ② ㉠, ㉢, ㉤
- ③ ㉡, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉥
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ (반례) $x = 1, y = 0$
- ㉡은 x 또는 y 가 0 보다 작을 때 $q : |x| + |y| > |x + y|$ 의 식에서 x, y 값이 하나가 음수이므로 우변의 절댓값이 적어지기 때문에 성립하고 역 역시 성립한다.
- ㉢에서는 위의 조건 p 에서 0 과 같은 경우가 추가되는데, 이는 한 가지 수가 음수이므로 그 수들의 차와 절댓값을 붙인 수가 양변에 같게 된다. 따라서 성립한다.
- ㉤ (반례) $x = -3, y = 1$
- ㉥ 조건 p, q 모두 $x = 0$ 이고 $y = 0$

32. $x \geq a$ 가 $x^2 - 4 < 0$ 의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$ 가 $-2 < x < 2$ 의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

33. $x \leq -2$ 또는 $0 < x \leq 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \leq a$ 이고, 충분조건이 $x \leq b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \leq b\} \subset \{x \mid x \leq -2 \text{ 또는 } 0 < x \leq 3\} \subset \{x \mid x \leq a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \geq 3, b \leq -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore m + M = 3 + (-2) = 1$

34. 두 조건 $p(x) : |x - a| \leq 1$, $q(x) : -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

- ① 5개 ② 4개 ③ 3개 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x | a - 1 \leq x \leq a + 1\}$, $Q = \{x | -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a - 1$ 이고 $a + 1 < 2$,
즉 $0 < a < 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

(ii) $3 \leq a - 1$ 이고 $a + 1 \leq 5$, 즉 $a = 4 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서 정수 a 는 4뿐이므로 1개이다.

35. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

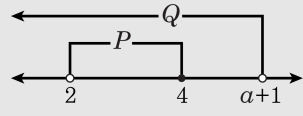
$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore a \leq -1$
또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
 $\therefore b \geq 3$
따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

36. 두 조건 $p : 2 < x \leq 4, q : x < a + 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 3$

해설



$p \rightarrow q$ 이므로 $a + 1 > 4 \Rightarrow a > 3$

37. $p : -1 \leq x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$, $q : x \geq a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
 $\therefore a \leq -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

38. 두 조건 $p: -5 \leq x < 6$, $q: 2a-3 < x \leq a+2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면

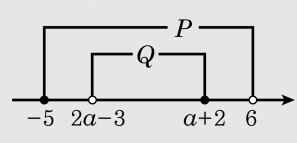
$$P = \{x \mid -5 \leq x < 6\},$$

$$Q = \{x \mid 2a - 3 < x \leq a + 2\}$$

이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$$\therefore Q \subset P$$

따라서, 다음 수직선에서



$$2a - 3 \geq -5 \vee a + 2 < 6$$

$$2a \geq -2 \vee \neg a < 4$$

$$\therefore -1 \leq a < 4$$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

39. $x^2 - ax - b \neq 0$ 은 $x - 1 \neq 0$ 이기 위한 충분조건일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

‘ $x^2 - ax - b \neq 0$ 이면 $x - 1 \neq 0$ 이다’가 참이어야 하므로 그 대우명제 ‘ $x - 1 = 0$ 이면 $x^2 - ax - b = 0$ 이다.’ 도 참이어야 한다.

$$1^2 - a \cdot 1 - b = 0$$

$$\therefore a + b = 1$$

41. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q 는 p 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$$P \subset R \subset S \subset Q \therefore P \subset Q \text{ 이므로 } P \subset Q$$

$$\therefore q \text{ 는 } p \text{ 이기 위한 필요조건}$$

42. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 가 모두 참이면 명제 $p \rightarrow r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다.

이 때, p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$p \rightarrow r, q \rightarrow r, r \rightarrow s, s \rightarrow q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

43. 자연수 n 에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 ‘ p 이고 $\sim q$ ’를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

‘ p 이고 $\sim q$ ’ $\Rightarrow P \cap Q^c = P - Q$
i) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0 이기 위해서는 인수로 2, 5를 가져야 한다.
 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
ii) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

44. 실수 x 에 대하여 두 조건 $p : a \leq x \leq 1$, $q : x \geq -1$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$

② $a \leq 1$

③ $-1 \leq a \leq 1$

④ $a \geq -1$

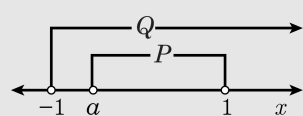
⑤ $a \leq -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(i) $a > 1$ 일 때, $P = \emptyset$ 이므로 $P \subset Q \therefore a > 1$

(ii) $a \leq 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii)에서 $a \geq -1$

45. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

- ① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$
- ② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$
- ③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$
- ④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$
- ⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

- ① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
- ② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
- ③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
- ④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
- ⑤ 명제 ‘ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ’ 은 참이지만, 그의 역 ‘ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ’은 거짓이다.

46. A, B, C 세 사람이 각각 빨강, 파랑, 검정색의 모자를 쓰고 있다. 이 세 사람 중 A 는 항상 참만을 말하고 C 는 항상 거짓만을 말한다고 한다. 이 세 사람이 다음과 같이 말했다.

- ㉠

빨강 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
- ㉡

검정 모자를 쓴 사람 : 자신이 B 이다.
- ㉢

파랑 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 A 이다.

위의 진술로부터 이끌어 낼 수 있는 사실이 아닌 것은?

- ①

검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
- ②

빨강 모자를 쓴 사람은 A 이다.
- ③

파랑 모자를 쓴 사람은 참말을 했다.
- ④

파랑 모자를 쓴 사람은 C 가 아니다.
- ⑤

검정 모자를 쓴 사람은 A 가 아니다.

해설

세 진술은 검정 모자를 쓴 사람을 모두 다르게 말했으므로 어느 하나만 참이다. A 는 항상 참만을 말하므로 참말은 A 가 했고, B, C 는 거짓말을 했다. 만약 A 가 검정 모자를 썼다면 ㉢의 말, 즉 파랑 모자를 쓴 사람이 참말을 했으므로 모순이다. 만일 B 가 검정 모자를 썼다면 ㉡의 말, 즉 B 가 참말을 했으므로 모순이다. 따라서 C 가 검정 모자를 썼고, 그 말을 한 빨강 모자를 쓴 사람은 참말을 했으므로, A 는 빨강 모자를 썼다. 따라서 파랑 모자를 쓴 사람은 B 이다. 그러므로 파랑 모자를 쓴 사람, 즉 B 는 거짓말을 했다.

47. 다음은 명제 ‘ $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)’에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

... (생략) ...
 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다.
한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여
 $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
 $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
 $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로 n^2 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서 $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.
... (생략) ...

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

- ① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
- ② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
- ③ m, n 이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
- ④ m, n 이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
- ⑤ m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3의 배수이다. ... ㉠
한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여,
 $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
 $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
 $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로, n^2 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서, $n^2 + 1$ 을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ... ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

48. 네 개의 명제 p, q, r, s 가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

$\textcircled{\text{㉠}} \quad p \Rightarrow q$	$\textcircled{\text{㉡}} \quad \sim r \text{ 그리고 } p \Rightarrow \sim q$
$\textcircled{\text{㉢}} \quad \sim s \Rightarrow p \text{ 그리고 } \sim r$	$\textcircled{\text{㉣}} \quad \sim p \Rightarrow \sim s$

- ① p ② p, q ③ q, r
 ④ p, q, r ⑤ p, q, r, s

해설

$\textcircled{\text{㉡}} \quad \sim r \text{ 그리고 } p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow r$ 또는 $\sim p$
 $\textcircled{\text{㉣}} \quad \sim p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$
 ㉢, ㉣에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p 는 참이다. ㉠에서 p 가 참이면 q 가 참이고 ㉡에서 q 가 참이면 r 도 참이다. ($\because \sim p$ 는 거짓) ㉢에서 대우가 참이므로 s 도 참이다.
 $\therefore p, q, r, s$ 모두 참이다.

49. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이나 충분조건은 아닌 것을 고르면?
(단, n 은 자연수, x, y, z 는 실수)

① $p : A \cup B = A, q : B - A = \phi$

② $p : n^2$ 은 12 의 배수이다., $q : n$ 은 12 의 배수이다.

③ $p : xyz \neq 0, q : x, y, z$ 는 모두 0 이 아니다.

④ $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0, q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$

⑤ $p : |x + y + z| = |x| + |y| + |z|, q : xy + yz + zx > 0$

해설

- ① $p : A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow q : B - A = \phi \therefore$ 필요충분조건
② $p : n^2$ 은 12의 배수이다. $\leftarrow q : n$ 은 12 의 배수이다.<반례>
 n 이 6 이면 n^2 은 12 의 배수이나 n 은 12 의 배수가 아니다.
 $\therefore$ 필요조건
③ $p : xyz \neq 0 \rightarrow q : x, y, z$ 는 모두 0 이 아니다. $\therefore$ 필요충분조건
④ $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, z = 0 \quad q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \{ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \} = 0 \Leftrightarrow x = y = z$
 $p : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$
 $\therefore$ 충분조건
⑤ $|x + y + z| = |x| + |y| + |z| \Rightarrow xy + yz + zx \geq 0$ <반례> $x = 3, y = 5, z = -1$ 을 대입하면 $q \rightarrow p$ 가 성립하지 않는다. $\therefore$ 충분조건

50. 다음 보기 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것의 개수는?

- ㉠ $p : xy + 1 > x + y > 2 \quad q : x > 1, y > 1$
- ㉡ $p : x^2 > y^2 \quad q : |x| > |y|$
- ㉢ $p : |x| + |y| = 0 \quad q : x^2 + y^2 = 0$
- 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
- ㉤ $p : (A \cup B) \cap (B - A)^C = A \cup B, q : B \subset A$
- ㉥ $p : (A \cup B) - (A \cap B) = B, q : A - B = \phi$
- ㉦ $p : (A \cup B) - (A \cap B) = B, q : A^C = U$

- ① 2개
- ② 3개
- ③ 4개
- ④ 5개
- ⑤ 6개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉦이 필요충분조건이다.
㉠ : $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1, y > 1$ 또는 $x < 1, y < 1$
그런데 $x + y > 2$ 이므로 $x > 1, y > 1 \therefore p \Rightarrow q$ 이고 역도 성립한다.
㉥ $(A \cup B) - (A \cap B) = B \Leftrightarrow A = \phi$